



Biblioteka
42

Martin Davis

Na logički pogon

Podrijetlo ideje računalā

Biblioteka 42

Izdavač: Naklada Jesenski i Turk

Za izdavača: Mišo Nejašmić

Urednik biblioteke: Ognjen Strpić

Prijevod: Ljerka Vukić i Ognjen Strpić

Slog: Palatino 10.5/12 pt (L^AT_EX/Debian)

Dizajn naslovnice: Božesačuvaj

Tisak: ZRINSKI d. d., Čakovec

UDK 510.6:004 * 164:024

DAVIS, Martin

Na logički pogon : podrijetlo ideje računala /
Martin Davis ; <prijevod Ljerka Vukić i Ognjen Strpić>
– Zagreb: Naklada Jesenski i Turk, 2003. – Biblioteka 42

Prijevod djela : Engines of Logic. – Bibliografija. – Kazalo
I. kompjutori – logičke osnove
II. matematička logika – povijest

ISBN 953-222-138-7

Na logički pogon podrijetlo ideje računala

Martin Davis

Naklada Jesenski i Turk

Zagreb, 2003.

Izvornik:

Martin Davis, *Engines of Logic*, W.W. Norton and Company, New York, 2001.

Copyright © 2000 by Martin Davis

Copyright za hrvatsko izdanje © Naklada Jesenski i Turk

Sadržaj

Predgovor	9
Uvod	13
1 Leibnizov san	15
Leibnizova divna ideja	17
Pariz	19
Hannover	26
Univerzalna karakteristika	28
2 Boole pretvara logiku u algebru	35
Težak život Georgea Boolea	35
Algebra logike Georgea Boolea	47
Boole i Leibnizov san	54
3 Frege: od velikog otkrića do beznađa	57
Fregeov Begriffsschrift	64
Frege smišlja formalnu sintaksu	69
Zašto je pismo Bertranda Russella bilo tako razorno? . .	71

Frege i filozofija jezika	73
Frege i Leibnizov san	74
4 Cantor: zaobilaznicom kroz beskonačnost	77
Inženjer ili matematičar	79
Beskonačnih skupova ima raznih veličina	82
Cantorova potraga za beskonačnim brojevima	88
Dijagonalna metoda	93
Depresija i tragedija	97
Presudna bitka?	99
5 Hilbert stiže u pomoć	103
Rane Hilbertove pobjede	105
Ususret novom stoljeću	110
Kroneckerov duh	112
Metamatematika	119
Konačni slom	124
6 Gödel remeti planove	129
Povratak Kroneckerovog duha	133
Neodlučivi iskazi	137
Kurt Gödel, programer	143
Konferencija u Königsbergu	145
Ljubav i mržnja	148
Hilbertova presuda	154
Tužan kraj jednog čudaka	160
7 Turing stvara svenamjensko računalo	163
Dijete Imperija	164
Hilbertov Entscheidungsproblem	170
Turingova analiza postupka izračunavanja	172
Turingovi strojevi u pogonu	176
Turing primjenjuje Cantorovu dijagonalnu metodu	182

Nerješivi problemi	186
Turingov univerzalni stroj	189
Alan Turing na Princetonu	192
Rat Alana Turinga	196
8 Stvaranje prvih univerzalnih računala	203
Tko je izumio računalu?	203
John von Neumann i fakultet Moore	206
ACE Alana Turinga	215
Eckert, von Neumann i Turing	218
Zahvalna nacija nagrađuje svog junaka	221
9 Nakon Leibnizovog sna	227
Računala, mozak i um	229
Epilog	237
Bilješke	239
Bibliografija	271
Kazalo	283

Predgovor

Temu ove knjige čine ideje koje su omogućile stvaranje modernih računala i ljudi koji su te ideje razvijali. Netom nakon što sam završio doktorat iz matematičke logike na Sveučilištu Princeton, u proljeće 1951. godine, predavao sam na Sveučilištu Illinois. Predavanja su se temeljila na Turingovim zamislima. Na istom sveučilištu radio je i sâm Turing jedno desetljeće prije mene. Moja predavanja je pohađao jedan mladi matematičar koji me upozorio da se u ulici nasuprot učionice upravo konstruiraju dva stroja za koja je bio uvjeren da su nastala na osnovu Turingovih zamisli. Ubrzo sam počeo pisati programe za ta prva računala. Pola stoljeća sam se profesionalno bavio vezom između apstraktnih logičkih ideja koje stoje u pozadini modernih računala i njihove realizacije.

Računala su pedesetih godina bila ogromna i jedva su mogla stati u sobu. Danas su to moćni strojevi koji mogu izvesti začuđujuć broj različitih zadataka, no logika koja stoji u njihovoj pozadini nije se promijenila. Ona se razvila iz radova nekolicine mislilaca kroz nekoliko stoljeća. U ovoj ću knjizi ispričati njihove životne priče i objasniti dio njihovih razmišljanja. Priče su same po sebi

zanimljive, no nadam se da čitatelji neće samo uživati u njima, već da će nakon što ih pročitaju bolje razumjeti što se zbiva unutar računala, a i da će barem malo više cijeniti apstraktno mišljenje.

Puno ljudi mi je pomoglo da napišem ovu knjigu. Zaklada John Simon mi je pružila financijsku potporu u početku istraživanja. Patricia Blanchette, Michael Friedman, Andrew Hodges, Lothar Kreiser i Benson Mates velikodušno su sa mnom podijelili svoje stručno znanje. Tony Sale je bio moj vodič u Bletchley Parku, gdje je u Drugom svjetskom ratu Turing dešifrirao tajne njemačke vojne poruke. Eloise Segal mi je pomogla da izbjegnem neke zamke u objašnjavanju određenih problema. Ona je predano iščitavala knjigu, ali nažalost nije doživjela njezino izdavanje. Supruga Virginia uporno mi je branila da budem nejasan. Sherman Stein je pažljivo pročitao rukopis, predložio razna poboljšanja i primijetio mnoge pogreške. U prevođenju su mi pomogli Egon Börger, William Craig, Michael Richter, Alexis Manaster Ramer, Wilfried Sieg i François Treves. Svojim komentarima pomogli su i Harold Davis, Nathan Davis, Jack Feldman, Meyer Garber, Dick i Peggy Kuhns i Alberto Policriti. Ed Barber, moj urednik u izdavačkoj kući W. W. Norton velikodušno je sa mnom podijelio svoje poznavanje pripovjedačkog stila u engleskom jeziku i zaslužan je za mnoga poboljšanja u tom pogledu. Harold Rabinowitz me upoznao s agentom Alexom Hoytom koji mi je puno pomogao. Ovim želim samo zahvaliti tim ljudima, a ne umanjiti svoju odgovornost za nedostatke knjige. Ispravke i komentare čitatelji mi mogu slati na adresu davis@eipye.com.

Martin Davis

Berkeley, 2. siječnja 2000.

Napomena uz ovo izdanje. Knjiga je u tvrdom uvezu trebala izaći pod naslovom *The Universal Computer* i kad je bila pred tiskanjem, Julio Gonzales Cabillion i John McCarthy su me upozorili na nekoliko grešaka koje sam još stigao ispraviti. Zahvaljujem im i žao mi je što je bilo prekasno da im se zahvalim u predgovoru. Kad je knjiga izašla, Connie Holmes me upozorila da je jedan ulomak, za koji sam mislio da je savršeno jasan, zapravo dvosmislen. Connie sam upoznao na krstarenju Nilom, a grešku sam stigao ispraviti. Hvala Connie.

Uvod

Ako bi se ispostavilo da temeljna logika stroja proizvedenog za izračunavanje diferencijalnih jednadžbi odgovara logici stroja koji radi račune u robnoj kući, smatrao bih to najčudnijom koincidencijom s kojom sam se ikada susreo.

—Howard Aiken, 1956.¹

Vratimo se sada analogiji teoretskih računalnih strojeva... Može je pokazati da samo jedan jedini osobit stroj takve vrste može obavljati zadatke svih njih. Zapravo, on može služiti kao model bilo kojeg drugog stroja. **Taj osobiti stroj možemo nazvati univerzalnim strojem.**

—Alan Turing, 1947.²

U jesen 1945, na Elektrotehničkom fakultetu Moore u Philadelphiji završavalo se konstruiranje ENIAC-a, gigantskog računskog stroja s tisućama vakuumskih cijevi. Grupa stručnjaka redovito se sastajala kako bi raspravljala o planu za njegova nasljednika EDVAC-a. Tjedni su prolazili, a sastanci su postajali sve zaoštreniji. Stručnjaci su se dijelili u dvije grupe o kojima se počelo govoriti kao o "inženjerima" i "logičarima". Voditelj inženjera John

Presper Eckert bio je s pravom ponosan na svoja postignuća s ENIAC-om. Smatralo se da je nemoguće da 15,000 vrelih vakuumskih cijevi radi tako dugo koliko je potrebno da postignu bilo što upotrebljivo. Pa ipak, uz upotrebu pažljivih, konzervativnih konstrukcijskih principa, Eckertu je to genijalno uspjelo. Vrhunac je bio kad je, na Eckertovo nezadovoljstvo, vodeći logičar grupe, eminentni matematičar John von Neumann, pustio u opticaj nacrt izvještaja o EDVAC-u. U njemu nije bilo puno konstrukcijskih detalja te je izlagao strukturu fundamentalnog *logičkog* računala. Do dan-danas ona se zove von Neumannova arhitektura.

Iako konstrukcijski *tour de force*, ENIAC je logički bio veoma zbrkan. Von Neumannovo poznavanje logike, i ono što je naučio od engleskog logičara Alana Turinga, omogućili su mu da shvati kako je računalni stroj zapravo logički stroj. On je nastao na osnovu pročišćenih uvida koje je značajan broj logičara razvijao stoljećima. Danas, kad računalna tehnologija napreduje tako zadivljujućom brzinom i kad se divimo istinski značajnim dostignućima inženjera, lako je previdjeti logičare čije ideje su to omogućile. Ovo je knjiga o njima.

1 Leibnizov san

Planinsko područje Harz, smješteno jugoistočno od njemačkog grada Hannovera, bogato je rudnim žilama. Tamo se ruda vadila još od sredine desetog stoljeća. Često se događalo da se u dubljim dijelovima rudnika počne nakupljati voda. Iskapanje su u takvim slučajevima omogućavale pumpe koje su tu vodu zadržavale. U sedamnaestom stoljeću pumpe su se snabdijevale vodenim kolom, pa bi se u zimskom periodu kada rijeke smrznu unosno vađenje rude moralo obustaviti.

Od 1680. do 1685. godine upravitelji rudnika planine Harz bili su u čestom sukobu s jednim potpuno beznadnim rudarom. Njemu je tada bilo tridesetak godina, a zvao se Georg Wilhelm Leibniz. Leibniz je tamo došao da uvede vjetrenjače kao dodatni izvor energije koji bi omogućio rudnicima da rade tijekom cijele godine. On je dotad već bio postigao mnogo. Ne samo da je došao do većih matematičkih otkrića, stekao je slavu i kao pravnik, a mnogo je pisao i o filozofskim i teološkim pitanjima. Čak je kao diplomat došao na dvor Louisa XIV, u pokušaju da uvjeri francuskog Kralja Sunca da je bolje provoditi vojne akcije u Egiptu nego na područjima Nizozemske i Njemačke.¹

O neizgodama koje je s vjetrenjačama imao jedan melankolični Španjolac pisao je Cervantes sedamdesetak godina prije. Za razliku od Don Quijotea, Leibniz je patio od neizlječivog optimizma. Onima koji su bili ogorčeni zbog očiglednih nedaća u svijetu,

Leibniz je odgovarao da je Bog, sveznajući o svim mogućim svjetovima, nepogrešivo stvorio najbolji svijet koji je uopće moguće stvoriti i da je sve zle elemente našeg svijeta na najbolji mogući način uravnotežio s dobrima.* No, Leibniz je u rudarskom projektu planine Harz na kraju doživio neuspjeh. U svom optimizmu nije predvidio da će stručni rudarski inženjeri biti neprijateljski raspoloženi prema novajliji koji ih želi naučiti njihovu poslu. Osim toga, zanemario je nepouzdanost vjetra i činjenicu da je potrebno određeno vrijeme da se novi stroj uhoda. No, najnevjerojatniji dio njegova optimizma odnosio se na ono što je zamislio zaraditi od toga projekta.

Leibniz je imao viziju iznenađujućeg dosega i veličine. Notacija koju je razvio za diferencijalni i integralni račun (kojom se još uvijek služimo), omogućila je da se komplicirano računanje izvodi bez mnogo razmišljanja. Kao da notacija sve napravi sama. U Leibnizovoj viziji nešto slično bilo je moguće napraviti za cjelokupno ljudsko znanje. Sanjao je o enciklopedijskom, univerzalnom umjetnom matematičkom jeziku kojim bi se moglo izraziti svako područje znanja, o pravilima izračunavanja koja bi otkrila sve logičke veze među izraženim iskazima. Konačno, sanjao je o strojevima koji mogu obavljati izračune i osloboditi um za kreativno mišljenje. Uza sav svoj optimizam, Leibniz je znao da taj san ne može pretvoriti u zbilju sâm. No, vjerovao je da bi mali broj sposobnih ljudi, koji bi zajedno radio u znanstvenoj akademiji, mogao za nekoliko godina dostići velik dio toga sna. Od projekta planine Harz Leibniz je zapravo želio zaraditi novac kojim bi financirao takvu akademiju.

*Voltaireov dr. Pangloss iz *Candidea* shvaća svijet na ovakav "leibnizovski" način.

Leibnizova divna ideja

Leibniz je rođen 1646. u Leipzigu. Njemačka je tada bila podijeljena u valjda tisuću zasebnih, politički poluautonomnih jedinica, i opustošena ratom koji je trajao gotovo tri desetljeća. Tridesetogodišnji rat završio je tek 1648. godine. Usprkos tome što su u njemu sudjelovale gotovo sve glavne evropske sile, vođen je uglavnom na njemačkom tlu. Leibnizov otac, profesor filozofije na Sveučilištu u Leipzigu, umro je kad je djetetu bilo svega šest godina. Iako su se njegovi učitelji tome protivili, Leibniz je u osmoj godini dobio pristup očevoj biblioteci i ubrzo je tečno čitao latinske tekstove.

Predodređen da postane jedan od najvećih matematičara svih vremena, prvi uvod u matematičke ideje dobio je od učitelja koji nisu ni naslućivali da negdje drugdje u Evropi matematika zapravo preinačuje iz temelja. U Njemačkoj toga doba čak je i elementarna euklidska geometrija bila napredni predmet koji se učio samo na akademskom nivou. Njegovi su ga učitelji u ranim dječaćkim godinama pak uveli u Aristotelov sustav logike star dvije tisuće godina i ta je tema probudila njegov matematički talent i strast. Fasciniran Aristotelovom podjelom pojmova u strogo određene "kategorije", Leibniz je došao do onoga što će kasnije nazvati svojom "divnom idejom": pokušati pronaći posebnu abecedu, čiji elementi ne bi predstavljali zvukove, nego pojmove. Jezik koji se temelji na takvoj abecedi trebao bi omogućiti da se simboličkim računom odredi koje su rečenice napisane u tom jeziku istinite, i koje logičke veze postoje među njima. Leibniz je ostao opčinjen čarima Aristotela i čvrsto se držao ove vizije do kraja života.

Tema Leibnizovog diplomskog rada, kojeg je napisao na Sveučilištu u Leipzigu, bila je upravo Aristotelova metafizika. Njegov se magistarski rad na istom Sveučilištu bavio vezom između filozofije i prava. Očito privučen i studiranjem prava, došao je i do drugog magisterija, ovaj put iz pravne znanosti i to s radom koji



Gottfried Wilhelm Leibniz

je naglasak stavio na korištenje sistematske logike u pravnoj problematici. Leibnizov prvi pravi doprinos matematici razvio se iz njegovog *Habilitationsschrift*a (nešto kao druga doktorska disertacija u Njemačkoj) iz filozofije. Kao prvi korak prema divnoj ideji abecede pojmova, naveo je potrebu da se pobroje različiti načini kombiniranja tih pojmova. To ga je dovelo do sistematične studije problema složenih kombinacija sastavljenih od osnovnih elemenata, prvo u *Habilitationsschriftu*, a onda i u opsežnijoj monografiji *De Arte Combinatoria*.²

Leibniz je nastavio studirati pravo, i doktorsku disertaciju iz pravnog područja obranio je na Sveučilištu u Leipzigu. Tema je bila tipično "leibnizovska": korištenje razuma u pravnom mišljenju kod slučajeva koji su preteški da bi ih se riješilo uobičajenim metodama. Fakultet u Leipzigu iz nejasnih je razloga odbio prihvatiti disertaciju pa ju je Leibniz predstavio na Sveučilištu Altdorf, blizu Nürnberga. Tamo je disertacija primljena s odobravanjem. U dvadeset i prvoj godini i sa završenim formalnim obrazovanjem, Leibniz se suočio s uobičajenim problemom mladog stručnjaka: kako napraviti karijeru.

Pariz

Kako je bio nezainteresiran za karijeru sveučilišnog profesora u Njemačkoj, Leibniz je slijedio svoju jedinu alternativu, a ona je bila pokušati naći bogatog i plemenitog pokrovitelja. Našao ga je u baronu Johannu von Boineburgu, nećaku elektora Mainza, koji ga je zaposlio na modernizaciji pravnog sustava zasnovanog na rimskom građanskom pravu. Ubrzo je Leibniz imenovan sucem Prizivnog odjela Vrhovnog suda. Okušao se i u diplomatskim spletkama, uključujući i propali pokušaj da utječe na izbor novog kralja Poljske i posebno mu povjeren zadatak na dvoru Louisa XIV.

Tridesetogodišnji rat Francusku je učinio "supersilom" na

evropskom kontinentu. Mainz, gradić smješten na obalama Rajne, bio je za vrijeme rata okupiran. Zato su njegovi građani jako dobro razumjeli koliko je važno preduhitriti neprijateljske vojne akcije i stoga su održavali dobre veze s Francuskom. Upravo su zato Boineburg i Leibniz smislili plan da uvjere Louisa XIV i njegove savjetnike u to kako je puno bolje da objekt njihovih vojnih nastojanja bude Egipat. Najvažniji povijesni učinak ovog prijedloga – u biti istog onog koji je Napoleona doveo do vojne katastrofe više od stoljeća kasnije – bilo je to što je Leibniz došao u Pariz.

Leibniz je 1672. stigao u Pariz kako bi podupro plan o Egiptu i kako bi pomogao urediti neke Boineburgove financijske poslove. No prije kraja godine, iznenada se dogodila katastrofa. Stigla je vijest da je Boineburg umro od srčanog udara. Iako je nastavio vršiti neke usluge za obitelj Boineburg, Leibniz je ostao bez pouzdanog izvora prihoda. Usprkos tome, uspio je ostati u Parizu još četiri iznimno produktivne godine. U tom periodu dvaput je nakratko boravio u Londonu.³ Pri prvom posjetu 1673. godine jednoglasno je izabran u londonsko Kraljevsko društvo na osnovu toga što je uspio izložiti računalni stroj koji može izvesti četiri osnovne aritmetičke operacije. Iako je Pascal konstruirao stroj koji može zbrajati i oduzimati, Leibnizov je bio prvi koji je mogao još množiti i dijeliti.* Taj stroj je zapravo bila jedna veoma domišljata spravica koja je kasnije postala poznata kao "Leibnizov kotač". Često je korišten i u računskim strojevima dvadesetog stoljeća. O svom stroju Leibniz je pisao:

I sada, kad konačno smijemo pohvaliti stroj, možemo reći da će on biti koristan svima koji se bave računanjem, a to su, kao što znamo, knjigovođe, upravnici posjeda, trgovci, nadzornici, ge-

*Blaise Pascal rođen je 19. lipnja 1623. u Clermont-Ferrandu u Francuskoj. Jedan je od osnivača matematičke teorije vjerojatnosti. Bio je plodan matematičar, fizičar i filozof religije. Oko 1643. konstruirao je i izgradio računalni stroj koji mu je donio popriličnu slavu. Umro je 1662. godine.

ografi, pomorci, astronomi. . . No, ograničimo se na upotrebu u znanosti. Stare geometrijske i astronomske tablice mogu se ispraviti te napraviti nove pomoću kojih možemo mjeriti sve vrste krivulja i oblika . . . isplati se proširiti velike pitagorejske tablice što je moguće više: tablicu kvadrata, kubova i ostalih potencija i tablice kombinacija, varijacija i progresija svih vrsta, . . . Osim toga, astronomi zasigurno više neće morati vježbati strpljivost koja im je dosad bila potrebna za računanjem. . . . Jer nije dostojno vrsna čovjeka da kao rob gubi vrijeme u računanju koje se pouzdano može prepustiti bilo kome tko se služi strojem.⁴

Iako je njegov stroj poznavao samo jednostavnu aritmetiku, Leibniz je shvatio šire značenje mehanizacije izračunavanja. Godine 1674. opisao je stroj koji može riješiti algebarske jednadžbe. Godinu dana kasnije usporedio je logičko rasuđivanje s mehanizmom i tako se približio cilju: svesti rasuđivanje na neku vrstu računanja i na koncu izgraditi stroj koji takve izračune može izvesti.⁵

Kad mu je bilo dvadeset i šest godina, Leibniz je upoznao velikog nizozemskog znanstvenika Christiaana Huygensa, koji je tada živio u Parizu. To je bio presudan događaj u njegovu životu. Četrdesettrogodišnji Huygens je tada već bio otkrio Saturnove prstene i izmislio sat s njihalom. Još nije uslijedio njegov najznačajniji doprinos, valna teorija svjetlosti. Huygensova koncepcija – da se svjetlost sastoji od valova poput onih koji se šire jezerom kad se u nj baci kamenčić – direktno se suprotstavljala velikoj Newtonovoj teoriji po kojoj je svjetlost sastavljena od roja odjelitih čestica u obliku taneta.* Huygens je Leibnizu dao popis literature koji mu je omogućio da brzo nadomjesti nedostatak znanja iz područja suvremenih matematičkih istraživanja. Ubrzo je i Leibniz počeo značajnije doprinositi znanosti.

*Iako je Huygensovo mišljenje s vremenom postalo općeprihvaćeno, dolazak kvantne fizike u dvadesetom stoljeću pokazao je da su i Newton i Huygens bili u pravu. Svaki je otkrio jedno bitno obilježje svjetlosti.

Dva su otkrića bila presudna za nagli razvoj matematičkih istraživanja u sedamnaestom stoljeću:

1. Sistematizirana je tehnika služenja algebarskim izrazima (uglavnom srednjoškolska algebra). Ta je moćna tehnika gotovo jednaka onoj kojom se danas služimo.
2. Descartes i Fermat su pokazali da se geometrija može svesti na algebru ako decimalni zarez prikažemo pomoću para brojeva.

Mnogi matematičari su pomoću ove nove tehnike počeli rješavati dotad nerješive probleme. Velik dio te tehnike uključivao je *limese*. To znači da su rješavali problem koristeći približne vrijednosti za traženi odgovor, koje se sustavno sve više približavaju traženom odgovoru. Ideja je bila ne zadovoljiti se ni sa kojom određenom približnom vrijednošću, nego "ići do limesa" da bi se dobilo *tačno* rješenje.

Primjer koji tu ideju može pojasniti je ovaj prikaz jednog od Leibnizovih ranih rezultata, na kojeg je bio vrlo ponosan:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Na lijevoj strani znaka "=" je poznati broj (koji se pojavljuje u formulama za površinu kruga.* Na desnoj strani je ono što zovemo *beskonačni niz*. Pojedinačni brojevi koji se naizmjenično dodaju i oduzimaju nazivaju se *članovima* niza. Točkice (...) znače da se niz beskonačno nastavlja. Potpuni beskonačni model sastoji se od razlomaka s brojnikom 1 i uzastopnim neparnim brojevima koji se naizmjenično dodaju i oduzimaju, kao nazivnicima. Kako izgleda potpuni beskonačni model trebali bismo zaključiti na osnovu konačnog dijela koji je prikazan. Nakon što oduzmemo $\frac{1}{11}$,

*broj $\frac{\pi}{4}$ zapravo je površina kruga radijusa $\frac{1}{2}$.

broj članova	zbroj na 8 decimalnih mjesta
10	0.76045990
100	0.78289823
1,000	0.78514816
10,000	0.78537316
100,000	0.78539566
1,000,000	0.78539792
10,000,000	0.78539816

Tablica približnih vrijednosti za Leibnizov niz

dodat ćemo $\frac{1}{13}$, zatim oduzeti $\frac{1}{15}$, i tako dalje. No je li zaista moguće izvesti neograničen broj zbrajanja i oduzimanja? Zapravo nije. No, ako počnemo od početka, a prekinemo u bilo kojem trenutku, dobit ćemo približnu vrijednost do "istinitog" odgovora. Ta približna vrijednost postaje to preciznija što više članova uključujemo. Zapravo, točnost približne vrijednosti ovisi o tome koliko članova želimo uključiti. U tablici je to prikazano za Leibnizove nizove. Ako uključimo 10,000,000 članova dobivamo vrijednost koja odgovara istinitoj vrijednosti $\frac{\pi}{4}$, to jest 0.7853981634..., na osam decimalnih mjesta.*

Leibnizov niz na posebno jednostavan način povezuje broj π (površina kruga) i uzastopne neparne brojeve. On pokazuje jednu vrstu problema koji se mogu riješiti korištenjem limesa – to su problemi određivanja površina ispod krivulja. Druga vrsta problema koje možemo riješiti koristeći limese je točno određivanje brzine određene promjene, kao što je promjena brzine tijela koje se kreće.

*Brojčani podaci koji se tiču Leibnizova niza za $\frac{\pi}{4}$ dobiveni su pisanjem i puštanjem u pogon programa u Pascalu na PC 486 računalu na 33 MHz. Za rješavanje zadatka sa 100,000 članova trebalo je 50 sekundi, a za zadatak sa 10,000,000 članova osam minuta. Nakon dvije godine program je ponovno pušten u pogon na stroju Pentium 200 MHz i vremena su se smanjila na 4, odnosno 40 sekundi!

Posljednjih mjeseci 1675. godine pa sve do kraja njegova boravka u Parizu, Leibniz je došao do niza prijelomnih konceptijskih i računskih otkrića u korištenju limesa. Ona se nazivaju Leibnizovim "pronaskom diferencijalnog računa":

1. Leibniz je uvidio da su problemi određivanja površina i izračunavanja brzina promjena paradigmatiski, u smislu da mnoge različite vrste problema možemo svesti na jedan od ova dva tipa.*
2. Primijetio je, nadalje, da su matematičke operacije potrebne za izračunavanje rješenja za probleme ova dva tipa, zapravo *inverzne* (obrnute) jedna drugoj, isto kao što su operacije zbrajanja i oduzimanja (ili množenja i dijeljenja) međusobno inverzne. Danas su ove operacije poznate kao *integracija*, odnosno *diferenciranje*, a činjenica da su one obrnute jedna drugoj sadržana je u "osnovnom teoremu diferencijalnog računa".
3. Leibniz je razvio odgovarajući sustav simbola (upravo ta notacija se koristi i danas) za ove operacije, $\int$ za integrale i d za diferencijale.[†] Došao je i do matematičkih pravila potrebnih za izvođenje integrala i diferencijala u praksi.

Uzeta zajedno, ova su otkrića upotrebu limesa pretvorila od metode dostupne samo nekolicini stručnjaka u jasnu tehniku koju tisuće ljudi mogu naučiti iz udžbenika.⁶ Ono što je najvažnije za temu naše knjige jest to da je ovaj uspjeh uvjerio Leibniza koliko je važno izabrati odgovarajuće simbole i pronaći pravila za služenje njima. Simboli $\int$ i d ne predstavljaju zvukove bez značenja poput

*Tako su pronalaženje centra gravitacije i volumena problemi prvog tipa, a izračunavanje akceleracije i marginalne elastičnosti (u ekonomskoj teoriji) problemi drugog tipa.

[†]Simbol za integrale $\int$ je zapravo modificirano "S" od "suma", a simbol " d " podsjeća na riječ "diferencija".

slova fonetske abecede. Oni predstavljaju pojmove, te su kao takvi zapravo model za Leibnizovu mladenačku divnu ideju abecede *svih* temeljnih pojmova.

Puno je toga napisano o odvojenom i potpuno samostalnom razvoju diferencijalnog računa Newtona i Leibniza i o ljutim optužbama za intelektualnu krađu s obje strana La Manchea, prije nego su konačno svi shvatili koliko su takve optužbe smiješne. Za našu priču značajna je velika nadmoć Leibnizove notacije.⁷ Ključna tehnika korištena u integralima (metoda "supstitucije") praktički je automatska u Leibnizovoj notaciji, dok je u Newtonovoj prilično komplicirana. Čak se tvrdilo da su Newtonovi engleski sljedbenici zaostajali za svojim suvremenicima s kontinenta u razvoju matematičkih perspektiva koje je otkrio diferencijalni račun, upravo zbog ropske odanosti metodama svog nacionalnog junaka.

Kao i toliki drugi koji su iskusili kvalitetu pariškog života, i Leibniz je htio tamo ostati koliko god je mogao. Nastavio je živjeti i raditi u tom gradu, a ipak je pokušao zadržati svoje veze iz Mainza. No, ubrzo je postalo jasno da mu dok je u Parizu nikakva sredstva neće stizati iz Meinza. U međuvremenu je stigla ponuda od hannoverskog vojvodstva, jedne od mnoštva njemačkih kneževina sedamnaestog stoljeća. Iako se vojvoda Johann Friedrich iskreno zanimao za intelektualnu problematiku i unatoč tome što je ponuda obećavala financijsku sigurnost, Leibniza nije privlačio život u Hannoveru. Odugovlačio je koliko god su mu to financije dopuštale, a onda je početkom 1675. prihvatio ponudu. Uz svoj pristanak ipak je zatražio "slobodu za nastavak istraživanja humanističkih i prirodnih znanosti na dobrobit čovječanstva".⁸ U jesen 1676, kad je postalo jasno da neće dobiti mjesto u Parizu i da vojvoda više ne želi čekati, napustio je taj grad. Ostatak života proveo je u službi vojvoda od Hannovera.

Hannover

Leibnizu je bilo savršeno jasno da će usprkos njegovom zahtjevu za "slobodom za nastavak istraživanja", njegov uspjeh na novom mjestu tražiti da radi ono što njegov pokrovitelj bude smatrao korisnim i praktičnim. Prihvatio se osuvremenjivanja vojvodske knjižnice i dao je razne ideje za poboljšanje javne administracije i poljoprivrede. Ubrzo je počeo zagovarati svoj nesuđeni projekt upotrebe vjetrenjača u rudarskim pothvatima na području planine Harz. Godine 1680, samo godinu dana nakon što je projekt Harz s Leibnizom na čelu odobren, iznenadna vojvodina smrt ugrozila je sigurnost njegovog radnog mjesta.

Sada je trebalo uvjeriti novog vojvodu Ernsta Augusta da ostavi Leibniza na tom mjestu i da podrži projekt planine Harz. Novi vojvoda je bio "praktičar". Za razliku od svojih prethodnika on nije bio voljan izdvajati mnogo za knjižnicu. Leibniz je uskoro naučio ne uključivati Ernsta Augusta u učene rasprave. Kako bi osigurao svoje radno mjesto, ponudio je napisati kratku povijest vojvodine obitelji. Pet godina kasnije, kad je vojvoda konačno zatvorio projekt Harz, Leibniz je predložio proširenu verziju povijesti obitelji. Ako se popune neke praznine, obiteljsko stablo moglo bi sezati sve do 600. godine. Vojvoda je očito to smatrao najpogodnijim načinom da zaposli jednog od najvećih mislilaca svih vremena, a čak nije ni škrtario. Za ovaj zadatak Leibniz je redovito dobivao plaću, imao je osobnu tajnicu i novac za putovanja na kojima je istraživao rodoslovlje. Optimistični Leibniz vjerojatno nije mogao ni zamisliti da će biti prikovan za genealogiju preostala tri desetljeća svog života. (Georg Ludwig, koji je naslijedio Ernsta Augusta nakon njegove smrti 1698, vrlo je strogo zapovijedio Leibnizu da završi povijest obitelji.)

Leibniz nije imao tada uobičajene predrasude o intelektualnim sposobnostima ženskog spola. Svi učenici koje je imao u Han-

noveru bile su žene. Vojvotkinja Sophie, nadarena žena Ernsta Augusta, često je razgovarala s Leibnizom o filozofskim temama. Kad bi Leibniz napustio Hannover, nastavljali su komunicirati pismima. Ona se pobrinula da kćeri Sophie Charlotte, budućoj kraljici Pruske, pruži blagodati Leibnizove poduke. Sophie Charlotte nije bila zadovoljna pukim prihvaćanjem Leibnizove mudrosti, već je energično postavljala pitanja koja su i njemu pomagala da pročisti svoje ideje. Kao što objašnjava suvremeni poznavalac Leibniza, Benson Mates:

Većinu njegova života ove su žene bile glavni Leibnizovi zagonnici na dvorovima u Hannoveru i Berlinu. Iznenađna smrt Sophie Charlotte 1705. jako je pogodila Leibniza. To je za njega bio toliki gubitak da je čak primio formalne izraze sućuti od izaslanika stranih vlada. Kad je vojvotkinja Sophie . . . umrla 1714, propala je mogućnost da dobije bilo kakvu potporu, osim za nastavak povijesti Brunswicka.⁹

Taj pojekt Leibnizu je dao izgovor da slobodno putuje, kojim se služio toliko da su njegovi plemeniti pokrovitelji smatrali on tu slobodu previše koristi, i to ih je ljutilo. Razumljivo je da je Leibniz potpuno iskoristio mogućnost da uspostavi i zadrži kontakte vezane uz znanost. U Berlinu je čak uspio osnovati Društvo za znanosti, koje se kasnije institucionaliziralo u akademiju. Puno se dopisivao i pisma su obuhvaćala svu raznolikost njegovih interesa. Izgleda da mu nikada nije dosadilo objašnjavati kako, budući da je Bog stvorio najbolji mogući svijet, mora postojati *prestabilirana harmonija* između onoga što postoji i onoga što je moguće i da postoji dovoljan razlog (bez obzira na to možemo li ga mi naći ili ne) za svaku pojedinačnu stvar u svijetu. U području diplomacije, Leibniz je imao dva omiljena projekta: ponovno ujediniti razne ogranke kršćanske crkve i pribaviti vojvodama od Hannovera pravo nasljedstva na britansko prijestolje. No, kad je Georg

Ludwig zaista postao George I od Engleske, samo dvije godine prije Leibnizove smrti 1716, energično je odbio molbu svog službenika da napusti hannoversko mrtvilo i ode u London, naredivši mu da požuri završiti povijest obitelji.

Univerzalna karakteristika

Što se dogodilo s divnom idejom iz Leibnizove mladosti, njegovim velikim snom da pronađe abecedu ljudskog mišljenja i odgovarajuća oruđa za služenje njezinim simbolima? Iako je popustio pred činjenicom da tako nešto ne može postići sâm, razmišljao je i pisao o tom cilju cijelog života i nikada ga nije zaboravljao. Bilo mu je jasno da su posebne oznake koje koristimo u aritmetici i algebri, simboli u kemiji i astronomiji i oni simboli koje je sâm uveo za diferencijalni i integralni račun, primjeri koji pokazuju kako odgovarajući sustav simbola može biti presudan. Takav sustav oznaka Leibniz je zvao *karakteristika*. Za razliku od simbola abecede koji nemaju značenja, gore navedeni primjeri po njegovu mišljenju čine realnu karakteristiku u kojoj svaki simbol predstavlja određenu ideju na prirodan i odgovarajući način. Potrebna nam je, tvrdio je Leibniz, *univerzalna karakteristika*, sustav simbola koji ne samo da je realan, već i uključuje čitavo ljudsko mišljenje.

Leibniz to objašnjava u pismu matematičaru G. F. A. L'Hospitalu: "Dio tajne" algebre "nalazi se u karakteristici, to jest u umijeću pravilnog služenja" simboličkim izrazima. Ta briga za pravilno korištenje simbola trebala bi biti "Arijadnina nit" koja bi znansvenika dovela do karakteristike.

Kao što objašnjava poznavalac Leibniza, logičar dvadesetog stoljeća Louis Couturat:

Upravo algebarska notacija utjelovljuje, da se tako izrazimo, karakteristiku i ona treba služiti kao model. I upravo je algebra

ono što Leibniz dosljedno navodi kako bi pokazao da je sustav odgovarajuće izabranih simbola koristan i nužan za deduktivno mišljenje.¹⁰

Možda je s najvećim oduševljenjem predloženu karakteristiku objasnio sam Leibniz u pismu Jean Galloys, s kojom se puno dopisivao:

Sve sam više uvjeren u korisnost i zbiljnost ove opće znanosti i vidim da je vrlo malo ljudi shvatilo njezine razmjere... Ta se karakteristika sastoji od određenog pisma ili jezika ... koji savršeno predstavlja veze između misli. Oznake bi bile prilično različite od onoga što je dosad izmišljeno. Razlog tome je to, što se zaboravlja načelo da oznake u ovom pismu trebaju služiti domišljatosti i prosuđivanju upravo kao što služe u algebri i aritmetici. Ovo pismo će imati velike prednosti. Jedna od njih mi se čini posebno važnom. Ako se budemo služili ovim oznakama, nećemo moći napisati himerične pojmove (*chimères*), koji nam se često žele nametnuti. Neznalica neće moći upotrebljavati to pismo ili će u pokušaju da se njime služi i sam postati učen.¹¹

Kad govori o važnosti odgovarajućeg sustava simbola, Leibniz u navedenom pismu upućuje na aritmetiku i algebru. Arapski sustav notacije, kojim se i danas služimo, temelji se na znamenkama od 0 do 9, a za jednostavne računske operacije ima posebne prednosti u odnosu na prijašnje sustave (kao što su rimski brojevi), smatrao je Leibniz. Bio je posebno očaran otkrićem jednostavnog sustava binarne notacije u kojem je bilo koji broj moguće napisati koristeći samo znamenke 0 i 1. Vjerovao je da će se na taj način moći razotkriti obilježja brojeva koja bi inače ostala skrivena. Iako se pokazalo neutemeljenim, ovo Leibnizovo uvjerenje je izuzetno značajno ako imamo u vidu koliko je binarna notacija važna za moderna računala.

Leibnizov veliki program sastojao se od tri glavna dijela. Kao prvo, prije nego se mogu izabrati odgovarajući simboli, potrebno

je izraditi kompendij ili *enciklopediju* koja bi obuhvaćala sve ljudsko znanje. Tvrdio je da će tada moći odabrati ključne temeljne pojmove i za svaki od njih pronaći odgovarajući simbol. Naposljetku, pravila dedukcije mogla bi se svesti na služenje ovim simbolima, to jest na ono što Leibniz naziva *calculus ratiocinator*, a što bismo danas mogli zvati simboličkom logikom. Suvremenog čitatelja ne iznenađuje što se Leibniz nije osjećao sposobnim sâm ostvariti takav program, pogotovo kada zna pod kolikim je pritiskom bio da završi povijest obitelji, što je pokrovitelj smatrao njegovim osnovnim zadatkom. Pa ipak je danas teško shvatiti kako je Leibniz mogao ozbiljno vjerovati da se ovaj svijet u kojem živimo, u svojoj svojoj složenosti, može svesti na jedan jedini simbolički račun.

Ostaje nam samo nada da ćemo to početi shvaćati ako pokušamo vidjeti svijet Leibnizovim očima. Za njega ništa, apsolutno ništa o svijetu ni na koji način nije bilo nedeterminirano ili slučajno. Sve slijedi plan, plan jasan u Božjim očima, po kojem je On stvorio najbolji svijet koji se uopće stvoriti moglo. Stoga su sve pojave u svijetu, bile one naravne ili nadnaravne, povezane vezama za koje se možemo nadati da ćemo ih otkriti razumom. Samo iz takve perspektive možemo razumjeti slavno mjesto iz Leibnizovih spisa u kojem piše o ozbiljnim "ljudima dobre volje" koji sjedaju za stol kako bi riješili jedan vrlo važan problem. Nakon što problem zapišu u Leibnizovu jeziku, njegovoj univerzalnoj karakteristici, mogu reći: "Izračunajmo!", izvaditi olovke i pronaći rješenje koje bi svatko nužno smatrao ispravnim.¹²

Leibniz je s oduševljenjem pisao o važnosti stvaranja *calculus ratiocinatora*, algebre logike, potrebne za izvođenje tih izračuna:

Ako slavimo ljude koji su odredili broj pravilnih geometrijskih tijela – što to je zapravo beskorisno, osim utoliko što je ugodno o tome razmišljati – i ako matematičkom genijalnošću smatramo to što smo iznijeli na svjetlo dana neka elegantnija svojstva cisoide i konkoida ili nekog drugog geometrijskog lika kojeg rijetko

DEFINICIJA 3. A je u L ili L sadrži A , jednako je kao reći da L odgovara skupu mnoštva članova, u kojem je A jedan član. $B \oplus N = L$ znači da je B u L i da B i N zajedno tvore ili čine L . Isto vrijedi i za veći broj članova.

AKSIOM 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

POSTULAT. Možemo dodati bilo koji veći broj članova, kao što su A i B , da bismo stvorili jedan član $A \oplus B$.

AKSIOM 2. $A \oplus A = A$.

ISKAZ 5. Ako A je u B i $A = C$, onda C je u B .

Jer u iskazu A je u B supstitucijom C s A dobivamo C je u B .

ISKAZ 6. Ako C je u B i $A = B$, onda C je u A .

Jer u iskazu C je u B supstitucijom A s B dobivamo C je u A .

ISKAZ 7. A je u A .

Jer A je u $A \oplus A$ (prema Definiciji 3). Dakle, (prema Iskazu 6) A je u A .

.....
TEOREM 20. Ako A je u M i B je u N , onda $A \oplus B$ je u $M \oplus N$.

Izvadak iz jednog Leibnizovog logičkog računa

koristimo, koliko će onda biti vrednije uspijemo li podvrgnuti ljudsko rasuđivanje matematičkim zakonima, a ono je najvrsnije i najkorisnije što imamo.¹³

Za razliku od univerzalne karakteristike o kojoj je Leibniz tako uvjeren i strastveno pisao, ali je nije potanko opisao, *calculus ratiocinator* je pokušao napraviti nekoliko puta. Na ilustraciji se nalazi jedan ulomak iz najdotjeranijeg njegovog pokušaja u tom smjeru.¹⁴ Cijelo stoljeće i pol ispred svog vremena, Leibniz je iznio plan algebre logike. Ona određuje pravila za služenje logič-

kim pojmovima na isti način na koji uobičajena algebra određuje pravila za služenje brojevima. Uveo je novi poseban simbol $\oplus$ koji predstavlja kombiniranje većeg broja proizvoljnih članova. Smisao tog simbola možemo pokušati objasniti usporedbom sa spajanjem dviju skupina stvari u jednu cjelinu koja sadrži sve predmete obiju skupina. Znak plus potiče nas da mislimo o ovoj operaciji kao da je obično zbrajanje, ali nas krug oko njega upozorava da to zapravo nije obično zbrajanje jer ono što zbrajamo nisu brojevi. Neka od Leibnizovih pravila možemo naći u srednjoškolskim udžbenicima algebre. Do neke mjere, jednaka pravila vrijede za brojeve kao i za logičke pojmove. No, to još nije sve. Postoje i pravila koja se jako razlikuju od onih za brojeve. Najočitije takvo pravilo, ono na kojemu će kasnije u malo drugačijem kontekstu George Boole utemeljiti svoju algebru logike, je Leibnizov aksiom 2 koji navodi da je $A \oplus A = A$. On izražava činjenicu da kombiniranje većeg broja članova sa samima sobom neće donijeti ništa novo: očigledno, kombiniranjem svih predmeta iz jedne skupine s tom istom skupinom predmeta nastaje tek ista skupina. Jasno, to je posve drugačije nego kod zbrajanja brojeva: $2 + 2 = 4$, a ne 2.

U sljedećem poglavlju vidjet ćemo kako je George Boole, vjerojatno ni ne znajući za Leibnizove pokušaje, stvorio upotrebljivu simboličku logiku na Leibnizovim zasadama. Booleova logika u sebi je sadržavala logiku koju je Aristotel uveo prije dvije tisuće godina, no ograničenja koja su postojala kako u Aristotelovu tako i Booleovu sustavu, nadiđena su tek u kasnom devetnaestom stoljeću u radu Gottloba Fregea.¹⁵

Iako se Leibniz puno dopisivao, ne znamo mnogo o njemu kao osobi. Jedan njegov kroničar tvrdi da u ono malo Leibnizovih portreta koje posjedujemo, vidi sliku umornog, nesretnog i pesimističnog čovjeka, baš suprotno od njegove optimistične filozofije.¹⁶ Drugi su primijetili da je volio darivati keksima djecu svojih susjeda. Pouzdano znamo da je dao jednu ženidbenu ponudu u svo-

joj pedesetoj, no dok je dama oklijevala on se predomislio.¹⁷ Lako možemo zamisliti Leibniza kako provodi duge dane i često cijele noći za radnim stolom i zadivljujuće uredno vodi svoju golemu korespondenciju, a sluge mu donose obroke iz obližnje gostionice.*

Što bi bilo da Leibniz nije bio sputan poviješću obitelji svog pokrovitelja i da je bio slobodan posvetiti više vremena *calculusu ratiocinatoru*? Nije li već on mogao postići ono što je mnogo kasnije učinio Boole? No, naravno, takva su nagađanja beskorisna. Leibniz nam je zapravo ostavio samo svoj san, ali i on nas može ispuniti divljenjem moći ljudskog teorijskog mišljenja i služiti nam kao mjerilo za ocjenu vrijednosti kasnijih otkrića.

*Ovo mišljenje djelomično proizlazi iz biografije (vidi [Huber] u Bibliografiji) koju je napisao profesor Kurt Huber dok je u zatvoru čekao da ga pogube nacisti. On je podržavao nastojanja svojih studenata koji su na Sveučilištu u Münchenu osnovali tajnu grupu zvanu "Bijela ruža". Studentima su odrubljene glave zbog širenja antinacističkih letaka. Danas na Sveučilištu u Münchenu postoji trg koji nosi ime profesora Hubera. (Ovu informaciju o profesorovoj hrabrosti dugujem Bensonu Matesu).

2 Boole pretvara logiku u algebru

Težak život Georgea Boolea

Lijepa i inteligentna princeza Karolina von Ansbach, buduća žena Georgea II i kraljica Engleske, upoznala je Leibniza u Berlinu 1704, u osamnaestoj godini života. Nakon što je otišla na engleski dvor, često se dopisivala s Leibnizom i tako se održavalo njihovo prijateljstvo. Ona je pokušavala uvjeriti svog tasta Georgea I da dovede Leibniza u Englesku, no kao što znamo, kralj je uporno zahtijevao da on ostane u Njemačkoj i završi povijest hannoverske obitelji.

Karolina se našla usred smiješne prepirke između Leibniza i Newtona i njegovih sljedbenika, u kojoj je svaka strana neprestano optuživala onu drugu za krađu otkrića diferencijalnog računa. Pokušavala je uvjeriti Leibniza koliko je to nevažno, no to joj nije uspijevalo. Leibniz je tražio da ona utječe na kralja da ga imenuje historiografom Engleske, kako bi mogao parirati Newtonu koji je bio upravitelj državne kovnice novaca. Samo se tako, tvrdio je Leibniz, čast Njemačke mogla obraniti od Engleske. U pismu Karolini Leibniz tumači da se Newton, smatrajući da pješčano zrno koristi gravitacijsku silu, bez ikakva objašnjenja kako se ta sila prenosi, zapravo poziva na nadnaravne pojave u pokušaju da objasni jedan prirodni fenomen, što je, uvjeravao ju je, neprihvatljivo. Ka-

rolina je pokušala prevesti Leibnizove spise na engleski jezik i pritom se susrela sa Samuelom Clarkeom, kojeg su joj preporučili kao mogućeg prevoditelja.

Clarke je bio filozof i teolog, ali i uvjereni Newtonov sljedbenik. U djelu *Being and Attributes of God* (1704) iznio je dokaz o postojanju Boga. Karolina mu je pokazala pismo u kojem Leibniz napada neke Newtonove ideje. Zamolila ga je da na to pismo odgovori. To je bio početak dopisivanja koje je potrajalo sve do nekoliko dana pred Leibnizovu smrt. Ova se dva uma nisu slagala i to nas zapravo ne iznenađuje. S našeg stajališta, najzanimljivija činjenica o Samuelu Clarkeu jest to da je gotovo stoljeće i pol nakon Leibnizove smrti, George Boole pokazao valjanost svojih metoda na primjeru Clarkeovog dokaza o postojanju Boga. Tim je metodama Boole zapravo uspio oživjeti dio Leibnizovog sna. Clarkeove složene dedukcije moguće je svesti na jednostavan skup jednadžbi.¹

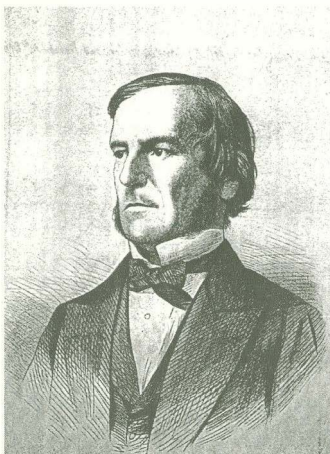
Leibnizov svijet je bio svijet evropskog plemstva sedamnaestog stoljeća. Da bismo došli u svijet Georgea Boolea, moramo se pomaknuti ne samo dva stoljeća unaprijed, već i nekoliko društvenih klasa niže. George je rođen 2. studenog 1815. u gradiću Lincolnu u istočnoj Engleskoj, kao prvo od četvero djece Johna i Mary Boole. U prvih devet godina braka John i Mary nisu imali djece. John Boole, postolar koji je jedva sastavljao kraj s krajem, gajio je strast za znanjem, i to posebno za znanstvenim instrumentima. Nažalost, nije bio dobar trgovac pa je njegov nadareni i savjesni sin ubrzo ponio teret uzdržavanja cijele obitelji.²

U lipnju 1830. građani Lincolna bili su počašćeni budalastom polemikom u lokalnim novinama o izvornosti engleskog prijevoda jedne Meleagerove pjesme, pisane na grčkom jeziku. Prijevod se pojavio u *Lincoln Herald*u, kao rad "G. B. Lincolna, 14 g." Stanoviti P. W. B. se potrudio optužiti G. B.-a za književnu krađu. P. W. B. je priznao da ne može naći izvor na temelju kojeg je optužio G. B.-a za prepisivanje, ali je jednostavno smatrao da takvo

što ne može napisati četrnaestogodišnjak. Uslijedila je polemika G. B.-a i P. W. B.-a, a *Herald* je uredno objavio cijelu prepisku.

Georgeova je obitelj rano prepoznala njegove sposobnosti, ali je bila siromašna i nije mu mogla omogućiti odgovarajuće formalno školovanje. Stoga se George, uz neizostavnu pomoć svog oca, uglavnom obrazovao sâm. Boole je proučavao ne samo latinski i grčki, već i francuski i njemački, te je (mnogo kasnije, dakako) pisao svoja matematička djela na tim jezicima. Nije bio pripadnik nijedne određene konfesije i zaključio je da mu je nemoguće vjerovati u božanstvo Krista, ali je cijeli život imao čvrsta vjerska uvjerenja. Ubrzo je odustao od prvotne namjere da se pridruži svećenstvu anglikanske crkve, djelomično zbog uvjerenja, a prije svega zato što je obitelji trebala financijska pomoć zbog propasti očeva posla. S nepunih šesnaest godina, George je počeo raditi kao učitelj u maloj metodističkoj školi, udaljenoj šezdesetak kilometara od njegova doma. Dobio je otkaz nakon dvije godine, najvjerojatnije zbog prituzbi na njegovo bezbožno ponašanje: nedjeljom se bavio matematikom, čak i u crkvi! U ovom periodu Boole se zaista počeo sve više i više baviti matematikom. Kasnije je, sjećajući se tog razdoblja svog života objasnio da je, kako nije imao mnogo novca za kupovinu knjiga, shvatio da mu se matematičke knjige najviše isplate jer mu je trebalo više vremena da ih shvati nego knjige iz drugih područja. Volio je govoriti i o iznenadnom nadahnuću kojeg je iskusio za vrijeme boravka u metodističkoj školi. Dok je hodao poljem, palo mu je na pamet da bi moralo biti moguće logičke veze izraziti u algebarskom obliku. Ovo iskustvo, koje jedan Booleov biograf uspoređuje s iskustvom svetog Pavla na putu u Damask, mnogo godina kasnije urodilo je plodom.³

Poslije metodističke škole, Boole se zaposlio u Liverpoolu. Tamo je živio i predavao šest mjeseci, a onda je osjetio da mora otići. Prema riječima Booleove sestre, otišao je zato što je često morao



George Boole

gledati "prizore velikih apetita i neobuzdanih strasti" vjerojatno od strane ravnatelja škole.⁴ I sljedeće je zaposlenje trajalo kratko. U devetnaestoj godini života George Boole odlučuje osnovati vlastitu školu u rodnom gradu Lincolnu. Na taj način stavio bi obiteljske financije na zdrave temelje. Petnaest godina bio je direktor svoje škole, a onda je prihvatio profesorsko mjesto na Sveučilištu Cork u Irskoj. Njegove škole (njih tri zaredom) bile su jedini izvor prihoda za njegove roditelje, braću i sestre; doduše sestra Mary Ann i brat William su mu pomagali u poslu.

Iako se vođenje škole i internata, uz mnogo održanih predavanja, može smatrati zaposlenjem s punim radnim vremenom, Boole se u tom periodu od osobe koja proučava matematiku uspio pretvoriti u kreativnog matematičara. Osim toga, nekako je pronašao vremena i za aktivnosti vezane uz pokušaj stvaranja kvalitetnijeg društva. Bio je osnivač i upravitelj ženskog doma pokajnica u Lincolnu, čija je svrha bila "osigurati privremeni dom u kojem bi se ženama koje su skrenule s puta vrlina, pomoću moralnog i religijskog podučavanja i stvaranja radnih navika, vratilo časno mjesto u društvu". Booleov biograf piše o prostitutkama (kojih je očito bilo puno u viktorijanskom Lincolnu) kojima je kao pokajnicama pomagala ova ustanova.⁵ No, puno je vjerojatnije da im je tipični klijent bila mlada sluškinja koja bi ostala u drugom stanju jer joj je ljubavnik (pripadnik istog socijalnog staleža) obećao brak.* Ponešto o Booleovim osobnim stavovima o pitanjima seksualnosti, možemo naslutiti iz onoga što je rekao na dva predavanja na nematematičke teme. U predavanju o obrazovanju upozorava:

Veliki dio postojeće grčke i rimske literature . . . duboko je okaljano prečestim aluzijama na poganske poroke. . . . A ja ne vjerujem da nije opasno trovatinevinu mladost.⁶

Istraživanje [Barret-Ducrocq] jedne slične institucije u Londonu, ustanovilo je da je bilo puno takvih priča o tamošnjim nedaćama.

Nakon uspješne kampanje za skraćivanje radnog vremena na deset sati, koju je vodila Lincolnska udruga za skraćivanje radnog vremena, održao je predavanje o ispravnom korištenju slobodnog vremena. Ono je sadržavalo i sljedeće stroge riječi:

Nema opravdanja za traženje nagrade za one ciljeve kojih se krepost kloni.⁷

Boole je išao očevim stopama; i on je surađivao s Lincolnskim institutom za mehaniku. Slični su instituti nikli na cijelom području viktorijanske Engleske, a bavili su se dodatnim obrazovanjem mehaničara i drugih radnika. Boole je bio član odbora Instituta te je predlagao kako osuvremeniti knjižnicu, držao predavanja i podučavao mnoge predmete, bez da mu je to bilo plaćeno.

Uza sve to, nekako je ipak stigao proučavati najvažnije engleske i evropske matematičke rasprave, a počeo ih je i sâm pisati. Mnogo Booleovih ranih radova svjedoči u prilog Leibnizovom uvjerenju u moć odgovarajućeg odabira matematičkih simbola i ukazuje to kako simboli, čini se gotovo čarobno, samostalno a točno, rješavaju probleme. Leibniz je ukazao na primjer algebre. U Engleskoj se baš u vrijeme kad je Boole počeo sa svojim istraživanjima počelo shvaćati da je algebra toliko uspješna zato što simboli za količine i operacije podliježu malom broju osnovnih pravila ili zakona. To je značilo da bi najrazličitiji objekti i operacije koje podliježu nekima od tih zakona, jednako tako mogli postati uspješni.⁸

Boole je u svojim ranim radovima primijenio algebarske metode na ono što matematičari nazivaju *operatori*. Oni "operiraju" tako što uobičajene algebarske izraze pretvaraju u nove. Boolea su posebno zanimali *diferencijalni operatori*, nazvani tako zato što podrazumijevaju operaciju diferenciranja u diferencijalnom računu o kojem smo govorili u prošlom poglavlju.⁹ Smatralo se da su oni posebno važni jer su mnogi osnovni fizikalni zakoni izraženi u obliku diferencijalnih jednačbi, odnosno jednačbi koje sadrže

diferencijalne operatore. Boole je pokazao da pojedine diferencijalne jednadžbe možemo riješiti ako metode algebre primijenimo na diferencijalne operatore. Današnji studenti strojarstva i prirodnih znanosti uče neke od tih metoda iz kolegija o diferencijalnim jednadžbama na prvoj ili drugoj godini studija.

Dok je bio direktor škole, Boole je objavio desetak radova u časopisu *Cambridge Mathematical Journal*. Osim toga, predao je vrlo dug rad u *Philosophical Transactions of the Royal Society*. U početku se Kraljevsko društvo nećkalo prihvatiti rad takvog "nestručnjaka", no kasnije su ga prihvatili da bi ga na koncu nagradili zlatnom medaljom.¹⁰ Booleu nije tražio bolji *dokaz* ispravnosti svojih metoda od činjenice da se njegovi primjeri tako mogu riješiti.¹¹

U to doba Boole je komunicirao s puno vodećih mladih matematičara Engleske kako profesionalno, tako i prijateljski. I upravo je prepirka između škotskog filozofa sir Williama Hamiltona i Booleovog prijatelja Augustusa De Morgana podsjetila Boolea na staru misao da se logičke veze možda mogu izraziti kao jedna vrsta algebre. Hamilton je bio dobar poznavatelj metafizike, ali i čovjek sklon svađama. Čak je i objavio protest protiv matematike kao znanstvenog područja; očito u kolosalnom neznanju o toj temi. Razljutilo ga je što je De Morgan objavio nešto što je Hamilton smatrao plagijatom vlastitog velikog logičkog otkrića koje je bio nazvao "kvantifikacija predikata". Nećemo gubiti vrijeme pokušavajući shvatiti taj pojam ili žestoku prepirku koju je on izazvao – to je važno zbog poticaja što ga je dalo Georgeu Booleu.¹²

Klasična Aristotelova logika koja je toliko fascinirala Leibniza sadrži rečenice poput sljedećih:

1. Sve biljke su žive.
2. Nijedan vodenkonj nije inteligentan.
3. Neki ljudi govore engleski.

Boole je došao do zaključka da je za logičko razmišljanje o takvim riječima, kao što su "žive", "vodenkonj" ili "ljudi", važna *klasa* ili *skup* svih pojedinačnih bića opisanih dotičnom riječju: *klasa* živih bića, *klasa* vodenkonja, *klasa* ljudi. Štoviše, uvidio je da se ovakvo razmišljanje može izraziti u vidu algebre takvih klasa. Boole je pomoću slova simbolički prikazao klase. Slova su se tako već prikazivali brojevi ili operatori. Akosu slova x i y označavala dvije određene klase, Boole je pisao xy za klasu stvari koje su i x i y . Kako je sâm napisao:

... Ako neki pridjev, kao npr. "dobar" upotrijebimo kao opisni pojam, prikažimo onda npr. slovom y sva ona bića kojima se "dobar" može pripisati, to jest "sva dobra bića", ili klasa "dobra bića". Uzmimo da ćemo kombinacijom xy prikazati onu klasu bića na koje se imena ili opisi prikazani s x ili y odnose u isto vrijeme. Dakle, ako x prikazuje "bijela bića", a y "ovce", neka onda xy prikazuje "bijele ovce". Ako z prikazuje "rogata bića" ... neka zxy prikazuje "rogate bijele ovce".¹³

Boole je primjenu ove operacije na klase, smatrao sličnom primjeni operacije množenja na brojeve. Ipak, primijetio je i jednu bitnu razliku: Ako je y još jednom klasa ovaca, što je onda yy ? To bi onda morala biti klasa bića koja su ovce i koja su još i ... ovce. To je upravo ono što je i klasa ovaca. Dakle, $yy = y$. Ne bismo puno pretjerali ako bismo tvrdili da je Boole čitav svoj sustav logike zasnovao na činjenici da ako x prikazuje klasu, onda je jednadžba $xx = x$ uvijek istinita. Kasnije ćemo se vratiti na to pitanje.*

Boole je objavio revolucionarnu monografiju o logici kao vrsti matematike u trideset i drugoj godini života. Dotjeraniji prikaz iste problematike, knjiga *The Laws of Thought*, pojavio se sedam godina

*Booleova jednadžba $xx = x$ usporediva je s Leibnizovom $A \oplus A = A$. I u jednoj i u drugoj, operacija koja bi se trebala primijeniti na parove članova, kad se primijeni na jedan član i na *samoga sebe*, kao rezultat daje taj isti član.

kasnije. U tim se godinama Booleova života događalo mnogo toga. Čini se da su njegova klasna pripadnost i neformalno obrazovanje potpuno isključili mogućnost da dobije mjesto na engleskom Sveučilištu. Neobično je da mu je upravo "irsko pitanje" otvorilo sveučilišno mjesto. Među mnoštvom jakih optužbi koje su se javljale u Irskoj na račun engleske vladavine, bila je i ona o protestantskom karakteru Trinity Collegea u Dublinu, jedinog irskog sveučilišta. Kao odgovor na to, Britanska vlada je predložila osnivanje triju novih sveučilišta u Corku, Belfastu i Galwayu pod nazivom Queen's College. Oni su bili nekonfesionalni, što je za ono doba bilo neobično. Planovi su napredovali usprkos javnim optužbama od strane irskih političara i osoba iz vjerskog života koji su zahtijevali katoličke institucije. Boole se odlučio prijaviti za mjesto na jednom od tih sveučilišta i nakon tri godine, 1849. je konačno imenovan profesorom matematike na Queen's Collegeu u Corku.

Sve do 1849. godine Irskom je harala glad i bolesti. Uzrok je bila štetna krumpirova gljivica koja je uništila većinu usjeva krumpira, osnove prehrane irskih siromaha. Velikom broju onih koji nisu umrli od gladi oslabio je imunitet pa su podlijegali epidemiji dizenterije, tifusa, kolere ili groznice. Engleski vladari su sporo shvaćali da su uši uzrok katastrofe i za sve su krivili navodni irski nemar. Takvom se analizom društva opravdavala činjenica da se hrana izvozila, dok su milijuni Iraca gladovali. U razdoblju od 1845. do 1852. godine, od osam milijuna Iraca umrlo ih je najmanje milijun, dok ih je oko milijun i pol napustilo zemlju.¹⁴

Boole o tome nije mnogo govorio: on se za to vrijeme zgražao nad okrutnošću prema životinjama. Njegov stav prema Ircima uistinu je bio veoma neodređen, kao što se vidi iz stihova Soneta Irskoj koji je napisao netom nakon otvaranja fakulteta u Corku:

Iako mlada u *mudrosti*,
Stara si u bijedi i suzama. O, kad bi iz tvojih grudi

Barem bile iscrpljene i izbrisane

Bolne misli koje lebde nad tvojom prošlošću.¹⁵

Cork svakako nije bio veliko intelektualno ili kulturno središte. No, to je mjesto ipak omogućavalo život koji je donekle odgovarao jednom od najvećih matematičara stoljeća. Nakon što mu je umro otac, Boole je zbrinuo majku i napokon se oslobodio tereta uzdržavanja obitelji pa je mogao je početi razmišljati o svom privatnom životu. Na Corku se učila vrlo jednostavna matematika. Program je počinjao "razlomačnom i decimalnom aritmetikom", a zatim se učilo današnje srednjoškolsko gradivo. Booleova godišnja plaća iznosila je 250£, uz dodatnih 2£ semestralno kao naknade za podučavanje od svakog studenta. Budući nije imao asistenta, sâm je ocjenjivao radove studenata.

Prepirke oko Queen's Collegea su se nastavljale. Iako je predsjednik Corka bio uvaženi katolički znanstvenik sir Robert Kane, neki su smatrali da je katolika ipak bilo premalo. Od dvadeset i jednog člana akademskog zbora, samo je još jedan bio katolik. Katolička crkvena hijerarhija išla je toliko daleko da je zabranila svećenstvu sudjelovanje u radu Fakulteta. Neki su vjerovali da osrednji Englezi i Škoti uzimaju mjesta kandidatima irske nacionalnosti. Ni predsjednik se nije pretjerano trudio oko Fakulteta. Njegova žena nije htjela živjeti u Corku, pa je on Fakultet pokušavao voditi iz Dublina. Upravo je to, uz predsjednikovu svadljivost, dovodio do čestih razmirica između njega i Fakulteta, a u njih je najčešće bio umiješan i Boole.¹⁶

Mary Everest, buduća Booleova supruga, kasnije je ispričala kako su je se u početku dojmili stavovi koje su neki žitelji Corka imali o njezinom budućem suprugu. Na pitanje o tome kakav je profesor matematike, jedna je gospođa odgovorila: "Oh, pa on je – čovjek kakvom biste povjeroili svoju kćer." Druga gospođa je objašnjavajući gdje su joj djeca, rekla gospođici Everest da su u

šetnji s gospodinom Booleom. Dodala je i da joj je drago su joj djeca s njim u šetnji.

Na primjedb u tome da Boolea očito vole svi, gospođa je oklijevala:

Meni nije tako drag, ... odnosno, ja baš i ne uživam u njegovu društvu. Ne volim biti s tako jako dobrim ljudima ... nikad ne pokazuje da misli da ste zločesti, no kad ste blizu nekog tako čistog i svetog, imate dojam da ga zapravo šokirate. Kad sam s Georgeom osjećam da sam zločesta, ali mi je uvijek drago kad su djeca s njim, jer znam da ipak dobivaju barem malo dobrote.¹⁷

Mary Everest je bila kćer ekscentričnog svećenika i nećakinja potpukovnika sir Georga Everesta, čije ime nosi najviši vrh svijeta. Bila je i nećakinja Booleova prijatelja i kolege Johna Ryalla, profesora grčkog i potpredsjednika Fakulteta Cork. On ih je i upoznao. Mary je pokazivala sklonost matematici još u ranom djetinjstvu. George ju je podučavao, a kasnije su postali prijatelji i često su se dopisivali. Izgleda da je Boole vjerovao da razlika od sedamnaest godina ne dopušta da se nešto više razvije među njima, no pet godina nakon što su se upoznali stvari su se promijenile. Umro je Maryn otac i ona je osiromašila. George ju je zaprosio i vjenčali su se prije kraja godine.

Njihov brak je trajao svega devet godina. Boole je umro u 49. godini života, nakon što je usred hladne listopadske oluje hodao oko pet kilometara da bi stigao na nastavu. Dobio je bronhitis koji je ubrzo prešao u upalu pluća. Umro je za dva tjedna. Tragično je što su njegovu smrt možda ubrzali i vrlo čudni pogledi na medicinu njegove žene – upalu pluća mu je liječila omatanjem u mokre, hladne plahte.¹⁸

Čini se da su imali sretan brak.¹⁹ Mary Boole ga pamti kao "uspomenu na sunčan dan". Booleova je udovica poživjela još dugo. Umrla je u osamdeset četvrtoj godini života dok je La Mancheom

bjesnio Prvi svjetski rat. Mary je bila sljedbenica raznih sustava mističnih vjerovanja i napisala je mnogo besmislica. Njihovih pet djevojčica imalo je zanimljive živote. Treća kći, Alicia, imala je vrlo neobične geometrijske sposobnosti. Mogla je jasno vizualizirati geometrijska tijela u četiri dimenzije. To joj je omogućilo da dođe do niza važnih matematičkih otkrića. Ipak je najneobičnija bila najmlađa kćer Ethel Lilian. Kad joj je umro otac imala je svega šest mjeseci, a ipak se sjećala da joj je djetinjstvo bilo veoma siromašno. Lily (kako su je zvali) se povezala sa skupinom ruskih revolucionara u Londonu kasnog devetnaestog stoljeća. Dok je bila u posjeti Ruskom Carstvu (koje je tada obuhvaćalo velik dio Poljske) radi pomoći svojim prijateljima revolucionarima, iz zatorske ćelije ju je promatrao Wilfred Voynich dok je proučavala varšavsku citadelu. Voynich ju je prepoznao mnogo godina kasnije, kad je već bio pobjegao u London. Ovaj romantični početak završio je brakom.

Lily se kasnije proslavila kao autorica knjige *The Gadfly*. To je roman nadahnut njezinom kratkom, ali strastvenom ljubavnom vezom s čovjekom koji je postao poznat kao Sidney Riley. Televizijska mini-serija *Riley: Ace of Spies* snimljena je upravo na temelju njegovog nevjerojatnog života.

Ironija je tim veća jer su Rileyja u Rusiji pogubili boljševici kao gorljivog antikomunista, a roman njegove ljubavnice postao je obavezna lektira ruskim školarcima. Nitko nije znao što je bilo pravo nadahnuće za roman. Godine 1955. *Pravda* je obavijestila svoje čitateljstvo u Moskvi da je autorica *Gadflyja* živa i zdrava i da se nalazi u New Yorku. Od Rusije je tada dobila tantijeme u iznosu od 15,000\$. Umrla je pet godina kasnije u devedeset i šestoj godini života.²⁰

Algebra logike Georgea Boolea

Vratimo li se Booleovoj novoj algebri primijenjenoj na logiku, sjetit ćemo se da ako x i y predstavljaju dvije klase, Boole piše xy za klasu onih bića koja pripadaju i klasi x i klasi y , a notacijom želi podsjetiti na analogiju s množenjem u običnoj algebri. U suvremenoj terminologiji xy nazivamo *presjek* x i y .²¹ Vidjeli smo i da je jednakost $xx = x$ uvijek istinita za slučajeve u kojima x predstavlja klasu. To je Boolea dovelo do sljedećeg pitanja: *Kad u običnoj algebri x predstavlja neki broj, za koje slučajeve vrijedi jednakost $xx = x$?* Odgovor je jednostavan: jednakost vrijedi isključivo za slučajeve kad x predstavlja 0 ili 1. Na osnovu toga, Boole je došao do temeljnog pravila da je algebra logike upravo ono što bi bila i obična algebra ograničena na dvije vrijednosti, 0 i 1. No da bi to imalo smisla, moramo simbole 0 i 1 tumačiti kao klase. Uporište za takvo razmišljanje nalazimo u ponašanju brojeva 0 i 1 u običnom množenju: 0 pomnoženo bilo kojim brojem daje 0, 1 pomnoženo bilo kojim brojem daje upravo taj broj. Simbolički:

$$0x = 0, \quad 1x = x.$$

Za klase vrijedi: $0x$ je identično s 0 za svaki x ako 0 interpretiramo kao klasu kojoj ne pripada ništa, ili u suvremenoj terminologiji, 0 je *prazni skup*. Slično, $1x$ je identično s x za svaki x ako 1 *sadrži svaki razmatrani predmet*, ili, kako se još kaže, ako je 1 univerzum diskursa.

Obična algebra se bavi kako množenjem i dijeljenjem, tako i zbrajanjem i oduzimanjem. Stoga, ako je Boole želio prikazati algebru logike kao običnu algebru s posebnim pravilom $xx = x$, morao je naći i objašnjenje za $+$ i $-$. Dakle, za x i y koji predstavljaju dvije klase, Boole je uzeo da $x + y$ predstavlja klasu svih bića koja postoje kako u x -u tako i u y -u, a to danas nazivamo unijom x i y . To znači, da se poslužimo Booleovim primjerom, da ako je x klasa muškaraca, a y žena, onda je $x + y$ klasa svih muškaraca i

žena. Boole je pisao $x - y$ za klasu onih bića klase x koja ne pripadaju klasi y .²² Ako x označava klasu svih ljudi, a y klasu sve djece, onda $x - y$ označava klasu odraslih. Napose, $1 - x$ bila bi klasa bića koja nisu u x -u, tako da imamo

$$x + (1 - x) = 1.$$

Pogledajmo sada kako računati u Booleovoj algebri. Napišimo, u običnoj algebarskoj notaciji, x^2 za xx . Dakle, Booleovo temeljno pravilo možemo pisati kao $x^2 = x$ ili $x - x^2 = 0$. Raščlanimo li ovu jednakost pomoću pravila obične algebre dobit ćemo:

$$x(1 - x) = 0.$$

Riječima: *Ništa ne može istovremeno pripadati i ne pripadati danoj klasi x . To je za Boolea bio poticajan rezultat koji mu je pomogao da se uvjeri da se doista kreće u pravom smjeru. I sâm je rekao, citirajući Aristotelovu *Metafiziku*, da ova jednakost izražava upravo*

... onaj "princip proturječja" koji je Aristotel opisao kao temeljni aksiom čitave filozofije. "Nemoguće je da neka oznaka i pripada i ne pripada istoj stvari... To je najizvjesnije od svih načela... I upravo zato oni koji nešto dokazuju ukazuju na ovo kao na temeljno načelo. Jer ono je po prirodi izvor sviju aksioma."²³

Boole je sigurno bio oduševljen što je došao do potvrde svoga rada kakvu priželjkuje svaki znanstvenik kad uvodi nove i općenite ideje: spoznaje da je neko značajno otkriće iz prošlosti zapravo tek pojedinačna primjena novih ideja, u ovom slučaju Aristotelova principa proturječja. Tada je čak bilo uobičajeno da logičari uspoređuju svoje radove s onim što je napravio Aristotel toliko stoljeća ranije. Kako je to objasnio sâm Boole, to činimo kako bismo dokazali da "znanost logike ne pati od onih nesavršenosti i onakvog napretka kakvom podliježu sve ostale znanosti". Dio logike koju je

proučavao Aristotel bavi se jednom posebnom vrstom zaključka, zvanim *silogizam*. Ti se zaključci sastoje od dva iskaza koja zovemo *premise* i trećeg iskaza koji zovemo *konkluzija*. Premise i konkluziju prikazujemo rečenicama jedne od sljedeće četiri vrste:

vrsta rečenice	primjer
Svi X su Y.	Svi konji su životinje
Nijedan X nije Y.	Nijedno stablo nije životinja.
Neki X su Y.	Neki konji su čistokrvni.
Neki X su Y.	Neki konji nisu čistokrvni.

Slijedi primjer valjanog silogizma:

$$\begin{array}{l} \text{Svi } X \text{ su } Y \\ \text{Svi } Y \text{ su } Z \\ \hline \text{Svi } X \text{ su } Z \end{array}$$

Da je ovaj silogizam *valjan* znači da kojim god svojstvima zamijenili X, Y i Z, ako su dvije dane premise istinite, bit će istinita i konkluzija. Pogledajmo dva primjera takvog silogizma:

Svi konji su sisavci.	Svi boojumi su snarkovi.
Svi sisavci su kralježnjaci.	Svi snarkovi su ljubičasti.
<u>Svi konji su kralježnjaci.</u>	<u>Svi boojumi su ljubičasti.</u>

Pomoću Booleovih algebarskih metoda lako možemo dokazati valjanost ovog silogizma. Reći da sve u X pripada i u Y, isto je kao i reći da ne postoji ništa što pripada u X, a da ne bi pripadalo i u Y, to jest $X(1 - Y) = 0$ ili $X = XY$. I drugu premisu možemo napisati u obliku $Y = YZ$. Koristeći ove jednakosti dobivamo

$$X = XY = X(YZ) = (XY)Z = XZ$$

a to je traženi zaključak.²⁴

Jasno, nije svaki silogizam valjan. Primjer *nevaljanog silogizma* možemo dobiti ako zamijenimo drugu premisu konkluzijom iz prethodnog primjera:

$$\begin{array}{l} \text{Svi } X \text{ su } Y \\ \text{Svi } X \text{ su } Z \\ \hline \text{Svi } Y \text{ su } Z \end{array}$$

Ovaj put pomoću premisa $X = XY$ i $X = YZ$ ne možemo doći do tobožnje konkluzije $Y = YZ$.

Iz današnje perspektive teško je razumjeti tada rašireno vjerovanje da se cijela logiku sastoji samo od silogističkog zaključivanja. Boole se, i to vrlo oštro, javno suprotstavljao takvom mišljenju. Isticao je da uobičajeno zaključivanje često uključuje ono što on naziva *sekundarnim iskazima*, a to su oni iskazi koje izražavaju veze između drugih iskaza. Takvo zaključivanje nije silogističko.

Kao primjer takvog zaključivanja poslušajmo razgovor Joea i Susan. Joe ne može naći čekove i Susan mu pomaže.

SUSAN: Jesi li ih ostavio u dućanu dok si kupovao?

JOE: Ne, zvao sam i nisu ih našli. Da sam čekove ostavio tamo oni bi ih sigurno našli.

SUSAN: Samo malo! Ti si sinoć u restoranu ispisao ček i vidjela sam da si stavljaio čekove u džep od jakne. Ako ih otad nisi koristio, sigurno su još tamo.

JOE: Imaš pravo. Nisam ih koristio. Čekovi su u džepu od jakne.

Joe traži i (ako je dobar dan za logiku) nalazi izgubljene čekove. Da vidimo kako bismo mogli iskoristiti Booleovu algebru za analizu zaključivanja Joea i Susan.

Joe i Susan su se pri zaključivanju koristili sljedećim iskazima (svaki smo označili njegovim slovom)

I = Joe je izgubio čekove u doćanu,
 N = Joeovi čekovi su nađeni u dućanu,
 $\check{C}$ = Joe je sinoć u doćanu ispisao ček,
 S = Nakon što je ispisao ček, Joe je
 spremio čekove u džep od jakne,
 K = Joe od sinoć nije koristio čekove,
 J = Joeovi čekovi su još u džepu od jakne.

Koristili su sljedeći model:

Premise:

Ako I onda N .
 Ne N .
 $\check{C}$ & S .
 Ako $\check{C}$ & S & K , onda J .
 K .

Konkluzije:

Ne I .
 J .

Kao i Aristotelovi silogizmi, i ovaj model omogućuje valjano zaključivanje. Jednako kao i kod bilo kog drugog valjanog zaključivanja, istinitost rečenica zvanih *konkluzije* izvedena je iz istinitosti drugih rečenica zvanih *premise*.

Boole je shvatio da ista algebra koja vrijedi za klase, vrijedi i za zaključke ovakve vrste.²⁵ Jednakosti kao što su $X = 1$ upotrebljavao je u značenju "iskaz X je istinit", a nejednakost $X = 0$ u značenju " X je neistinit". Tako bi za " $\text{Ne } X$ " napisao jednakost

$X = 0$. Za " $X \& Y$ " pisao je jednakost $XY = 1$. To je moguće zato što je iskaz $X \& Y$ istinit uvijek kad su i X i Y istiniti. Algebarski pak imamo $XY = 1$ za $X = Y = 1$, ali $XY = 0$ ako je ili $X = 0$ ili $Y = 0$ ili oboje.

Konačno, rečenicu "Ako X onda Y " možemo prikazati pomoću jednakosti

$$X(1 - Y) = 0.$$

Da bismo to bolje shvatili, zamislimo da ova rečenica tvrdi

$$\text{ako } X = 1 \text{ onda } Y = 1.$$

Supstitucijom $X = 1$ u gornjoj jednakosti dobivamo $1 - Y = 0$, to jest $Y = 1$.

Ako primijenimo ove pretpostavke, premise Susan i Joea možemo izraziti pomoću sljedećih jednakosti:

$$I(1 - N) = 0$$

$$N = 0$$

$$\check{C}S = 1$$

$$\check{C}SK(1 - J) = 0$$

$$K = 1$$

Supstitucijom druge jednakosti u prvoj dobivamo $I = 0$, prvu traženu konkluziju. Supstitucijom treće i pete jednakosti u četvrtoj dobivamo $1 - J = 0$, to jest $J = 1$, drugu traženu konkluziju.

Naravno da ova algebra nije bila potrebna Joeu i Susan. Međutim, činjenica da je Booleova algebra uspjela obuhvatiti neko neformalno zaključivanje iz običnog ljudskog razgovora, potaknula je nadu da ćemo njome možda moći raditi i s kompliciranijim zaključcima. Ako matematiku shvatimo kao disciplinu koja sus-

tavno obuhvaća vrlo komplicirane logičke zaključke, najveći ispit logičke teorije koja želi biti potpuna je upravo da li obuhvaća svo matematičko zaključivanje. Tom problemu ćemo se vratiti u sljedećem poglavlju.

Posljednji primjer Booleovih metoda neka bude dokaz o postojanju Boga Samuela Clarkea, koji smo spomenuli na početku poglavlja. Nećemo pokušavati slijediti Clarkeovu dugu i kompliciranu dedukciju, ali nam je zanimljivo vidjeti što dalje čini Boole. Citirat ćemo manji dio:²⁶

Premise su:—

1. Nešto jest.
2. Ako nešto jest, ili je to oduvijek bilo ili je ono što sada jest nastalo ni iz čega.
3. Ako nešto jest, to postoji ili zbog nužnosti vlastite prirode ili po želji nekog drugog bića.
4. Ako to postoji zbog nužnosti vlastite prirode, nešto je oduvijek bilo.
5. Ako to postoji po želji nekog drugog bića, onda je pretpostavka, da je ono što sada jest nastalo ni iz čega, neistinita.

Sada moramo gornje iskaze izraziti simbolički.

x = Nešto jest,

y = Nešto je oduvijek bilo,

z = Ono što sada jest nastalo je ni iz čega,

p = To postoji zbog nužnosti vlastite prirode,

(tj. to gore spomenuto).

q = To postoji po želji nekog drugog bića.

Boole iz premisa dobiva sljedeće jednakosti:

$$1 - x = 0$$

$$x\{yz + (1 - y)(1 - z)\} = 0$$

$$x\{pq + (1 - p)(1 - q)\} = 0$$

$$p(1 - y) = 0$$

$$qz = 0$$

Pitanje je što bi Clarke mislio o ovom svođenju njegovog zamršenog metafizičkog razmišljanja na obične jednakosti. Kao Newtonu učeniku vjerojatno bi mu bilo drago. S druge strane, svadljivi metafizičar sir William Hamilton koji je toliko mrzio matematiku, mora da bi se bio zgrozio.

Boole i Leibnizov san

Booleov logički sustav u sebi sadrži Aristotelov, ali je od njega puno širi. Ipak, i to je bilo daleko od ispunjenja Leibnizovog sna. Pogledajmo sljedeću rečenicu: *Svi propali studenti su ili glupi ili lijeni*. Mogli bismo pomisliti da ta rečenica pripada ovoj vrsti:

$$\text{Svi } X \text{ su } Y.$$

No, onda bismo klasu učenika koji su ili glupi ili lijeni nužno morali shvatiti kao jednu jedinicu, a to ne bi dozvoljavalo bilo kakvo zaključivanje koje bi razlikovalo one koji su neuspješni zato što su glupi od onih koji su neuspješni zato što su lijeni. U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti da logički sustav Gottloba Fregea obuhvaća ovakvo suptilnije zaključivanje.

Upotrebljavati Booleovu algebru kao sustav pravila izračunavanja prilično je jednostavno i mogli bismo reći da je njome ostvaren *calculus ratiocinator* koji je tražio Leibniz. Leibniz je o toj problematici pisao u svojim pismima i drugim neobjavljenim dokumen-

tima, koji su prikupljeni i izdani tek krajem devetnaestog stoljeća. Stoga je jasno da Boole nikako nije mogao znati ništa o nastojanjima svog prethodnika. Bez obzira na to, zanimljivo je usporediti Booleov bogati sustav s Leibnizovim nepotpunim pokušajima. U Leibnizovom ulomku koji smo naveli u prvom poglavlju, kao drugi aksiom navodi se $A \oplus A = A$. Dakle, operacija o kojoj je razmišljao Leibniz poštuje Booleovo temeljno pravilo $xx = x$. Štoviše, Leibniz je svoju logiku htio prikazati kao potpun deduktivni sustav u kojem su sva pravila izvedena iz malog skupa aksioma. To je u skladu s modernom praksom i pokazuje da je Leibniz u tome bio ispred Boolea.

Veliko Booleovo dostignuće je to što je jednom zauvijek pokazao da se logička dedukcija može razviti kao grana matematike. Iako se logika nakon Aristotela jest razvijala (stoici u helenizmu i evropski skolastičari u dvanaestom stoljeću), ona je do Boolea bila gotovo jednaka Aristotelovoj logici od prije dva tisućljeća. Nakon Boolea matematička logika se razvija bez prekida.*

Međunarodna organizacija *Association for Symbolic Logic* objavljuje dva kvartalna časopisa i ima redovite sastanke na kojima se iznose i šire nova istraživanja. Evropski logičari imaju svoje godišnje sastanke. Novi radovi iz područja veze između logike i računala predstavljaju se na godišnjim međunarodnim konferencijama Logika u računarstvu i Logika računarstva.

3 Frege: od velikog otkrića do beznađa

U srednjovjekovni gradić Jenu, koji će kasnije postati dijelom komunističke Istočne Njemačke, u svibnju 1902. godine stiglo je pismo mladog britanskog filozofa Bertranda Russella. Bilo je naslovljeno na četrdesettrogodišnjeg Gottloba Fregea. Iako je Frege vjerovao da je došao do važnih otkrića, njegov je rad bio gotovo u potpunost zanemaren. Vjerojatno je sa zadovoljstvom čitao: "Slazem se s Vama u svemu bitnom... U vašem sam radu našao rasprave, distinkcije i definicije koje uzalud tražimo u radovima drugih logičara." Ali, nastavlja pismo, "Postoji samo jedno mjesto gdje sam naišao na poteškoću". Frege je ubrzo shvatio da će ta "poteškoća" vjerojatno uzrokovati propast njegova životnog djela. Nije pomagalo ni to što je Russell dalje pisao: "pravilan odnos prema bitnim pitanjima logike vrlo se teško probija, a Vaši radovi su nešto najbolje što sam ikada vidio i stoga Vam izražavam svoje duboko štovanje".

Frege je odmah odgovorio Russellu potvrđujući da problem doista postoji. Iako je drugi svezak njegove rasprave u kojoj je primijenio svoje logičke metode na osnove aritmetike već bio u tisku, na brzinu je umetnuo dodatak koji počinje riječima: "Ništa se gore ne može dogoditi znanstveniku, nego da mu se uruše

temelji tek što dovrši svoj rad. Ja sam se našao u toj situaciji nakon pisma koje sam primio od gospodina Bertranda Russella.”

Mnogo godina kasnije, više od četiri desetljeća nakon Fregeove smrti, Bertrand Russell je jednom prilikom napisao:

Razmišljajući o čestitim i krepim djelima, dolazim do zaključka da ne znam ni za šta što bi se moglo uspoređivati s Fregeovom predanošću istini. Bio je korak do završetka svog životnog djela, a velik dio njegova rada bio je zanemarivan, a istodobno su se uvažavali neizmjeranije sposobni ljudi. Iako mu je drugi svezak bio pred tiskanjem, shvativši da mu je jedna temeljna pretpostavka kriva, reagirao je intelektualnim zadovoljstvom koje je potisnulo bilo kakve osjećaje osobnog razočaranja. To je bilo gotovo nadljudski i vrlo jasan pokazatelj toga za što je sposoban čovjek odan kreativnom radu i znanju, umjesto pukom težnjom za prevlašću i slavom.¹

Velik dio rada suvremenog filozofa Michaela Dummetta nadahnut je Fregeovim idejama. No, on o Fregeovoj čestitosti piše drugačije:

Ima ponešto ironije u činjenici da je čovjek, čijim sam filozofskim idejama klanjao gotovo cijelo vrijeme, potkraj života bio žestoki rasist i antisemit. . . [Njegov] dnevnik pokazuje da je Frege bio ekstremni desničar i da se žestoko protivio parlamentarnom sustavu, demokraciji, liberalima, katolicima, Francuzima i najviše Židovima, za koje je mislio da ih treba istjerati iz Njemačke i oduzeti im politička prava. Bio sam jako šokiran jer sam Fregea doživljavao kao sasvim racionalnog čovjeka.²

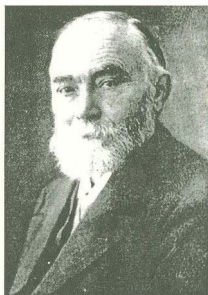
Fregeove zasluge su goleme. Stvorio je prvi potpuno razvijen sustav logike koji obuhvaća sve deduktivno zaključivanje uobičajene matematike, a u njegovi radovi prvi put se upotrebljava logička analiza u proučavanju jezika, što je osiguralo temelje za velika dostignuća na području filozofije. Danas ćemo u prosječnoj fakultetskoj knjižnici pod natuknicom “Frege, Gottlob” naći pedesetak naslova. Usprkos tome, Frege je 1925. godine umro kao

tužan čovjek, u uvjerenju da je njegovo životno djelo beskorisno. Znanstvena zajednica nije ni primijetila da je umro. I danas imamo jako malo podataka o njegovu osobnom životu.³

Gottlob Frege rođen je 8. prosinca 1848. u Wismaru, kome je sudbina odredila da kasnije postane dio komunističke Istočne Njemačke. Otac mu je bio evangelički teolog i ravnatelj ženske srednje škole u kojoj je radila i Fregeova majka. U trideset osmoj godini oženio se tridesetpetogodišnjom Margarete Lieseberg. Žena mu je umrla nakon sedamnaest godina braka u kojem nisu imali djece. Frege je 1908. usvojio petogodišnje siroče, na zahtjev svog rođaka svećenika. Fregeov posinak Albert je objelodanio poznati dnevnik iz 1924. godine, koji je njegov otac napisao godinu dana prije smrti. Upravo je taj dnevnik jako razljutio i razočarao Michaela Dummetta. Sâm Alfred Frege sudjelovao je u vojnoj okupaciji Pariza i poginuo je u borbi u svibnju 1944, nešto više od tjedan dana nakon savezničkog iskrcavanja u Normandiji i samo dva mjeseca prije oslobođenja Pariza. Alfred je pretipkao očev dnevnik te ga je godine 1938, pet godina nakon što je Hitler preuzeo vlast, poslao Heinrichu Scholzu koji je održavao Fregeov arhiv. U to je vrijeme u Njemačkoj bilo uobičajeno gajiti osjećaje poput onih koji su razljutili Dummetta. Rukopis dnevnika, kao i Alfredova biografija njegova oca, izgubljeni su.

Frege je došao na sveučilište u dvadeset prvoj godini. Nakon dvije godine u Jeni preselio se u Göttingen, gdje je tri godine kasnije postigao doktorat iz matematike. Zatim je postao neplaćeni predavač (*Privatdozent*) na Sveučilištu u Jeni. Vjerojatno ga je tada uzdržavala majka koja je nakon očeve smrti preuzela vođenje ženske škole. Pet godina kasnije postao je izvanredni profesor u Jeni, gdje je ostao do umirovljenja 1918. godine. Kolege nisu uistinu cijenile njegov rad i Frege nikada nije postao redoviti profesor.

Njemačka je nakon ujedinjenja 1873. bila u euforičnom stanju. Rat protiv Francuske Napoleona III završio je velikom pobjedom.



Gottlob Frege

Industrija se razvijala velikom brzinom. Sve do smrti cara Wilhelma I, njegov kancelar Bismarck nastavio je svoju lukavu politiku održavanja sigurnosti Njemačke dobrim vezama sa saveznicima. Bismarcka i cara Wilhelma Frege je cijeloga života smatrao herojima. Međutim, Bismarck je bio ekstremni revolucionar koji se pobrinuo da car zadrži potpunu vojnu kontrolu kao i kontrolu nad vanjskim poslovima. Smatrao je demokraciju prokletstvom i podupirao je donošenje zakona koji su mnoge aktivnosti Socijal-demokratske stranke proglasili nezakonitima.

Ubrzo nakon što je postao car, Wilhelm II se riješio Bismarcka. Novi car bio je častohlepan i nesiguran i nije primjećivao da je njegova vanjska politika zapravo katastrofalna. Stalno je imao pogrešne procjene posljedica svojih poteza i time je toliko uznemirio ostale evropske sile da su Francuska, Rusija i Engleska stvorile savez protiv Njemačke. Suočen s ratnom opasnošću na dva fronta, protiv Rusije na istoku i Francuske na zapadu, glavni štab Njemačke donio je pametan, ali na kraju katastrofalan Schlieffenov plan, po kojem je trebalo brzo poraziti Francusku prije nego Rusija izvrši potpunu mobilizaciju.⁴

U ljeto 1914, kao odgovor na atentat na nadvojvodu Ferdinanda a uz ohrabrenje Njemačke, Austrijanci započinju Prvi svjetski rat napadom na Srbiju. Kako bi pokazali svoju odlučnost u tome da Austrija ne smije uništiti njihove slavenske prijatelje, Rusi proglašavaju mobilizaciju. Njemački su generali objasnili Kaiseru da mora hitno odgovoriti primjenom Schlieffenovog plana po kojemu Njemačka mora napasti preko Belgije. Ugrožavanje belgijske neutralnosti uvelo je i Englesku u katastrofalan rat čije posljedice bacajusjenuna čitavo dvadeseto stoljeće. Kako se rat rijetko odvija po planu, tako se i Schlieffenov plan raspao, a bitke su se pretvorile u smrtonosnu pat-poziciju koja je u rovovskom ratu uništila najbolji dio cijele jedne generacije Evropljana. Mnogi njemački znanstvenici nisu znali da rat ne napreduje u skladu s njihovim

očekivanjima i zahtijevali su mir u kojem bi Njemačka pripojila velik dio novih teritorija, uključujući i Belgiju.

Nijemci nikako nisu pobjeđivali, a engleska opsada je počela donositi ploda. Zato je vojnu komandu preuzeo general Ludendorff. Taj hiroviti kockar (koji je kasnije sudjelovao u Hitlerovom *Putschu* u studenom) nije htio ni čuti za kompromisni mir sve dok britanski proboj na Balkanu nije zaprijetio njemačkom boku. Suočen s porazom, Ludendorff je rekao caru da je primirje neizbježno. Tako je završio rat, a s njim i njemačka monarhija.

Vlast u novoj Njemačkoj republici preuzela je socijaldemokratska vlada. Mnogi su Nijemci (uključujući Fregea) prihvaćali priču o tome da je Njemačka natjerana u rat protiv svoje volje i da u ratu nije poražena, već su je izdali socijalisti i, mnogi su dodavali, Židovi. Ovakvo zatrovano okruženje omogućilo je Hitleru da napokon preuzme vlast.

Velika poslijeratna inflacija 1923. u Njemačkoj je izbrisala vrijednost osobnih ušteđevina pa tako i Fregeove mirovine. Frege je tako osiromašio da je sve do smrti 1925. godine morao živjeti u zajedničkom domaćinstvu s rođacima u Bad Kleinenu, nedaleko Wismara. U tim je okolnostima Frege pisao svoj otužni dnevnik. Tražio je velikog vođu koji bi Njemačku spasio iz teškog položaja u koji je gurnuta. Velike nade polagao je u Ludendorffa i razočaralo ga je što se on pridružio Hitlerovu prevratu. Nadao se da bi general Hindenburg mogao biti vođa, ali se bojao da je pres-tar; Frege nije poživio dovoljno dugo da vidi kako Hindenburg predaje ključeve Republike Adolfu Hitleru.

U svom dnevničkom zapisu od 22. travnja 1924. prisjeća se jednog događaja kad su u njegovu rodnom gradu ispravno postupili prema Židovima, koji nam otkriva njegove stavove prema Francuzima i njihovom pogubnom utjecaju:

U to vrijeme postojao je zakon koji je Židovima dopuštao da

preko noći ostanu u Wismaru samo za vrijeme određenih godišnjih sajмова. . . Pretpostavljam da je to stara odredba. Stari žitelji Wismara imali su iskustva sa Židovima pa su zato donijeli takav zakon.

Vjerojatno je tome razlog način na koji su Židovi poslovali, a i neke osobine njihova naroda, što je usko povezano s načinom na koji posluju. . . Svi su dobili pravo glasa, čak i Židovi. Stiglo je i pravo slobode kretanja, čak i za Židove. To su pokloni iz Francuske. Francuzi nas lako usrećuju poklonima. Kada bismo se barem okrenuli plemenitim i rodoljubivim Nijemcima. . . Francuzi su se dovoljno loše odnosili prema nama i prije 1913, a mi se ipak slijepo divimo svemu francuskom. . . Tek sam u nekoliko zadnjih godina počeo shvaćati što je to antisemitizam. Ako želimo napraviti zakone protiv Židova, morali bismo nekako pronaći znak raspoznavanja po kojem bismo sigurno mogli prepoznati Židova. Oduvijek sam mislio da je to problem.⁵

Za Fregea je problem bio kako definirati Židove dovoljno precizno da se protiv njih mogu napraviti zakoni. Njemu je to bio čisto teorijsko pitanje, no za vrijeme Nacista postalo je itekako praktično. Ludwig Wittgenstein, jedan od najvećih mislilaca dvadesetog stoljeća, Fregeov štovatelj i učenik, prema nacističkim bi pravilima bio klasificiran kao Židov.

U drugim dnevniciškim zapisima Frege se ograđuje od socijaldemokrata i katolika:

Reich je 1914. godine bolovao od raka, naime socijaldemokracije. (24. travnja)

Sigurno je da sam ja ultramontanizam i njegovo utjelovljenje u Zentrumu smatrao krajnje štetnim za naš Reich i narod, no usprkos tome, ono što je u svom [nedavno objavljenom] članku otkrio Ludendorff o pokušajima i makinacijama ultramontanaca, dalo mi je nove spoznaje koje su me duboko uznemirile. Molim sve one koji još ne vjeruju da je duh Zentruma potpuno nenjemački, da pročitaju članak njegove ekselencije Ludendorffa i razmisle o

njemu. . . To je opaki neprijatelj koji je potkopao Bismarckov Reich. . . [Ultramontanci] će svoje upute uvijek dobivati od Pape.*
(26. travnja)⁶

Fregeove ekstremno desničarske ideje nisu bile rijetkost u Njemačkoj nakon Prvog svjetskog rata. Ipak, možemo se pitati predstavlja li dnevnik samo misli ogorčenog (i možda senilnog) starca iz godine u kojoj je i umro. Na žalost, gotovo je sigurno da je neko vrijeme imao desničarske ideje. Fregeov kolega, profesor filozofije u Jeni Bruno Bauch, osnovao je za vrijeme rata Desničarsko filozofsko društvo (DPG) i izdavao njegov časopis. Frege je bio jedan od prvih pristaša DPG-a i objavljivao je u časopisu Društva. Bauchovi spisi o pojmu nacije tvrdili su da nijedan Židov ne može stvarno biti Nijemac. Njegova je grupa dala punu podršku Nacistima kad su 1933. preuzeli vlast.⁷

Fregeov Begriffsschrift

S Fregeovih groznih uvjerenja koje je izražavao potkraj života s olakšanjem prelazimo na sjajne radove iz njegove mladosti. Godine 1879.[†] objavio je knjižicu od stotinjak stranica naslovljenu *Begriffsschrift*. To je riječ koju je teško prevesti, a Frege ju je sastavio od njemačkih riječi *Begriff* ("pojam") i *Schrift* (otprilike "pismo" ili način pisanja").[‡] Djelo je imalo podnaslov "formalni jezik za čisto mišljenje, po uzoru na jezik aritmetike". Proglašeno je "vjerojatno najvažnijim logičkim djelom ikada napisanim".⁸

*Stranka Zentrum bila je bliska katoličkoj crkvi. Njezin "ultramontanizam" odnosio se na utjecaj "preko planina" (eng. *mountain*), to jest na Rim.

†Na znanstvenoj konferenciji u povodu stote godišnjice *Begriffsschrift*a 1979. godine bio sam pozvan održati izlaganje o posljedicama *Begriffsschrift*a za računarstvo. To je bio početak mog bavljenja povijesnim porijeklom računarstva u logici i početak istraživanja koje je rezultiralo ovom knjigom.

‡Na hrvatski se obično prevodi kao *Pojmovno pismo* – op. ur.

Frege je nastojao pronaći sustav logike koji bi uključivao sve deduktivno zaključivanje u matematičkoj praksi. Boole je kao polazište uzeo običnu algebru a logičke veze je predstavljao simbolima. Budući da je Frege htio da algebra, kao i drugi dijelovi matematike, bude izgrađena kao superstruktura u čijem bi temelju bila logika, smatrao je da je važno uvesti posebne simbole za logičke veze kako bi se izbjegla moguća zabuna. Osim toga, Boole je iskaze koje izražavaju veze između drugih iskaza smatrao sekundarnima, a Frege je uvidio da se iste veze koje povezuju iskaze mogu koristiti za analizu strukture pojedinačnih iskaza. Te su veze bile osnovom njegove logike. Ova presudna spoznaja postala je općeprihvaćena i ona čini osnovu moderne logike.

Na primjer, Frege bi rečenicu

Svi konji su sisavci

analizirao pomoću logičke veze *ako... onda...*:

Ako x je konj onda x je sisavac.

Slično bi i rečenicu

Neki konji su čistokrvni

analizirao pomoću logičke veze *... i ...*:

x je konj i x je čistokrvan.

Ipak, slovo x se u ovim primjerima koristi na različite načine. U prvom primjeru želi se reći da je ono što tvrdimo istinito *za bilo koji x* , to jest *za svaki x* . No, u drugom primjeru traži se potvrda samo *za neki x* . Simbolima koje danas koristimo, *za svaki* pišemo $\forall$, a *za neki* pišemo $\exists$. Naše dvije rečenice, dakle, možemo napisati na sljedeći način:

$$(\forall x)(\text{Ako } x \text{ je konj onda } x \text{ je sisavac}).$$
$$(\exists x)(x \text{ je konj i } x \text{ je čistokrvan}).$$

Simbol $\forall$, obrnuto A, sugerira englesku riječ "all" (svi) i zove se *univerzalni kvantifikator*. Slično, simbol $\exists$, naopako E, naziva se *egzistencijalni kvantifikator* i trebao bi podsjećati na englesku riječ "exists" (postoji). To znači da drugu rečenicu možemo čitati

Postoji takav x koji x je konj i x je čistokrvan.

Logička veza *ako... onda...* obično se označuje simbolom $\supset$, a veza *... i ...* simbolom $\wedge$. Uz upotrebu ovih simbola te rečenice postaju⁹

$$(\forall x)(x \text{ je konj } \supset x \text{ je sisavac}),$$
$$(\exists x)(x \text{ je konj } \wedge x \text{ je čistokrvan}).$$

To možemo skratiti na sljedeći način

$$(\forall x)(\text{konj}(x) \supset \text{sisavac}(x)),$$
$$(\exists x)(\text{konj}(x) \wedge \text{čistokrvan}(x)).$$

Ili još kraće,

$$(\forall x)(k(x) \supset s(x))$$
$$(\exists x)(k(x) \wedge c(x)).$$

U prethodnom poglavlju koristili smo primjer pokušaja Joea i Susan da nađu novčanik. U tom smo primjeru skraćivali rečenice ovim slovima:

I = Joe je izgubio čekove u dućanu,
 N = Joeovi čekovi su nađeni u dućanu,
 $\check{C}$ = Joe je sinoć u dućanu ispisao ček,
 S = Nakon što je sinoć ispisao ček, Joe je spremio čekove
 u džep od jakne,
 K = Joe od sinoć više nije koristio čekove,
 J = Joeovi čekovi su još u džepu od jakne.

Pri zaključivanju oni koriste sljedeći model:

Premise:

Ako I onda N .
 Ne N .
 $\check{C}$ & S .
 Ako $\check{C}$ & S & K , onda J .
 K .

Konkluzije:

Ne I .
 J .

Ako koristimo simbol $\neg$ za "ne", uza sve ostale simbole koje smo uveli, sada dobivamo

$$\begin{array}{c}
 I \supset N \\
 \neg N \\
 \check{C} \wedge S \\
 \check{C} \wedge S \wedge K \supset J \\
 K \\
 \hline
 \neg I \\
 J
 \end{array}$$

Konačno, treba spomenuti i simbol $\vee$ koji predstavlja ... ili ...
Evo sažetog prikaza dosad uvedenih simbola:

$\neg$	ne...
$\wedge$	...i...
$\vee$	...ili...
$\supset$	ako...onda...
$\forall$	svaki
$\exists$	neki

Na kraju prethodnog poglavlja susreli smo rečenicu

Svi propali studenti su ili glupi ili lijeni

kao primjer čiju logičku strukturu Booleova analiza ne bi uspjela obuhvatiti. U Fregeovoj logici to je lako. Ako napišemo

$P(x)$ za x je propali student

$G(x)$ za x je glup

$L(x)$ za x je lijen

tu rečenicu možemo izraziti kao

$$(\forall x)(Px \supset G(x) \vee L(x))$$

Sada nam je već jasno da Frege nije tek proširio matematički pristup logici, nego je zapravo stvorio novi jezik. Pritom ga je vodila Leibnizova ideja o univerzalnom jeziku čiji bi uspjeh ležao u razboritom izboru simbola.¹⁰ Koliko je izražavanje ovim jezikom uspješno, možemo procijeniti na sljedećem primjeru u kojem koristimo $V(x, y)$ za x voli y :

Svatko voli nekoga. $(\forall x)(\exists y) x \text{ voli } y$ $(\forall x)(\exists y)V(x, y)$

Svatko voli svakoga. $(\exists y)(\forall y) x \text{ voli } y$ $(\exists x)(\forall y)V(x, y)$

Svakoga voli netko. $(\forall y)(\exists x) x \text{ voli } y$ $(\forall y)(\exists x)V(x, y)$

Nekoga voli svatko. $(\exists y)(\forall x) x \text{ voli } y$ $(\exists y)(\forall x)V(x, y)$

Evo još jednog primjera:

Svatko voli ljubavnika.

U prvom koraku pišemo

$$(\forall x)(\forall y)[y \text{ je ljubavnik} \supset V(x, y)]$$

Ako biti ljubavnik jednostavno protumačimo kao voljeti koga, možemo zamijeniti y je ljubavnik sa $(\exists z)V(y, z)$, i na kraju dobiti

$$(\forall x)(\forall y)[(\exists z)V(y, z) \supset V(x, y)]$$

Frege smišlja formalnu sintaksu

Booleova je logika bila samo još jedna grana matematike, razvijana pomoću uobičajenih matematičkih metoda. Jasno je da to uključuje i korištenje logičkog zaključivanja. No, koristiti se logikom kako bismo razvijali logiku, zapravo je cirkularno. To je za Fregea bilo neprihvatljivo. On je namjeravao pokazati da je cijelu matematiku moguće utemeljiti na logici. Da bi to bilo uvjerljivo, Frege je morao naći način da svoju logiku razvije a da se pritom ne služi logikom. Njegovo je rješenje bilo razviti Begriffsschrift kao umjetni jezik s nemilosrdno preciznim gramatičkim pravilima, odnosno sintaksom. To je omogućilo da se logički zaključci prikažu kao potpuno mehaničke operacije, takozvana pravila izvođenja, koje se odnose samo na način na koji se raspoređuju simboli. To je ujedno i prvi primjer formalnog umjetnog jezika s preciznom sintaksom. S te točke gledišta, Begriffsschrift je preteča svih programskih jezika koje danas koristimo.

Temeljno Fregeovo pravilo izvođenja je: ako su $\diamond$ i Δ bilo koje dvije rečenice Fregeovog Begriffsschrifta i ako se tvrdi $\diamond \supset \Delta$, onda smijemo izjaviti i rečenicu Δ . Kod ove operacije važno je

primijetiti da za njenu provedbu nije nužno znati što znači $\supset$. Naravno, vidimo da nas to pravilo ne može dovesti do pogreške zato što nam ono omogućuje jedino da od $\diamond$ i (*Ako $\diamond$ onda Δ*) dođemo do Δ . Da bismo to pravilo zaista i upotrijebili potrebno je samo pojedinačnesimbole iz rečenice $\diamond$ jedan po jedan pridružiti simbolima prvog dijela dulje rečenice.¹¹ U našem primjeru pronalaženja Joeovog novčanika, imali smo premisu:

$$\check{C} \wedge S \wedge K \supset J.$$

Ako smo mogli tvrditi da $\check{C} \wedge S \wedge K$, pravilo nam omogućuje da tvrdimo jedan od traženih zaključaka, to jest J . Evo kako bismo izvršili povezivanje simbola:

$$\check{C} \wedge S \wedge K \supset J,$$

$$\check{C} \wedge S \wedge K.$$

Fregeova logika postala je uobičajeno gradivo za studente koji pohađaju kolegij logike na matematičkom i filozofskom fakultetu, kao i na studiju računarstva.¹² Na njoj se temelji ogroman broj istraživanja i upravo je ona indirektno dovela Alana Turinga do ideje o svenamjenskom računalu. No, o tome kasnije.

Fregeova logika je neizmjerljivo naprednija od Booleove. Po prvi puta jedan pravi sustav matematičke logike obuhvaćao je, barem teoretski, sve uobičajeno matematičko zaključivanje. No, nečega smo se ipak morali odreći da bismo postigli taj cilj. Polazimo od određenih premisa u Fregeovoj logici. Da bismo došli do tražene konkluzije, možemo primijeniti određena pravila. Ali, ako u tom pokušaju ne uspijemo, Frege nam ne omogućuje da znamo je li razlog tomu to što nismo bili dovoljno pametni ili uporni, ili to što tražena konkluzija jednostavno ne slijedi iz danih premisa. Ovaj nedostatak zapravo znači da Fregeova logika nije ispunila

Leibnizov san da će, kad uzviknu "Izračunajmo!", poznavaoći pravila logike moći bez greške odrediti stoji li određeni zaključak.

Zašto je pismo Bertranda Russella bilo tako razorno?

Ako je Fregeova logika bila tako veliko dostignuće, zašto je onda Russellovo pismo bacilo njezina tvorca u očaj? Frege je svoju logiku smatrao samo korakom u stvaranju potpunih temelja za aritmetiku. Iako su Leibnizov i Newtonov diferencijalni i integralni račun doveli do vrlo plodnih otkrića, postojali su određeni ozbiljni problemi u opravdavanju nekih zaključivanja koja su matematičari često koristili. Ti su se problemi postupno rješavali u devetnaestom stoljeću, većinom zbog razvoja nove i temeljne teorije sustava brojeva u matematici. Ipak, sve se temeljilo na takozvanim prirodnim brojevima:

$$1, 2, 3, \dots$$

Frege je htio izvesti isključivo logičku teoriju prirodnih brojeva i tako pokazati da aritmetika, pa tako i cijela matematika, uključujući i postignuća koja proizlaze iz diferencijalnog i integralnog računa, može biti shvaćena kao grana logike. Takav stav, kasnije nazvan *logicizam*, dijelio je i Bertrand Russell. Američki logičar Alonzo Church, logicizam je objašnjavao kao shvaćanje u kojem je veza između logike i matematike zapravo veza između osnova i naprednog dijela jedne te iste materije.*

Frege je prirodne brojeve htio definirati isključivo u terminima logike, a zatim pomoću logike izvesti svojstva tih brojeva. Na primjer broj 3 bismo objasnili kao dio logike. Kako je to moguće?

Danas je prihvaćeno mišljenje da se uz pomoć numeričkih koordinata geometrija može svesti na aritmetiku. No, Frege je uvijek smatrao da geometriju treba smatrati zasebnim područjem. Ovo Fregeovo mišljenje, kao i neke druge komentare koji su mi bili od pomoći u ovom poglavlju, dugujem Patriciji Blanchette.

Prirodni broj je svojstvo skupa, naime broj njegovih elemenata. Broj 3 je nešto što je zajedničko svemu što ćemo navesti: Sveto trojstvo, skup konja koji vuku tropreg, skup listova na (običnoj) djetelini, skup slova $\{a, b, c\}$. Bez da išta kažemo o broju 3, jasno je da bilo koja dva navedena skupa imaju isti broj elemenata. Možemo ih jednostavno pridružiti. Fregeova ideja je bila poistovjetiti broj 3 s brojem elemenata svih tih skupova. To znači da je broj 3 skup svih trojki. Općenito, broj elemenata danog skupa možemo *definirati* kao niz svih onih skupova kod kojih je moguće izvesti pridruživanje jedan na jedan s danim skupom.¹³

Fregeova rasprava o temeljima aritmetike u dva sveska pokazala je kako razviti aritmetiku prirodnih brojeva pomoću logike razvijene u *Begriffsschriftu*. Pismo Bertranda Russella iz 1902. godine omogućilo je Fregeu da uvidi da je ona nekonzistentna, odnosno da proturiječi sama sebi. U Fregeovoj aritmetici zapravo se koristi skup skupova. Russell je u svom pismu pokazao da zaključivanje s tim skupom skupova lako može dovesti do proturječja. Russellov paradoks možemo objasniti ovako: Nazovimo skup *neobičnim* ako je sâm svoj član a ako nije, nazovimo ga *običnim*. Kako je moguće da postoje neobični skupovi? Russellov primjer neobičnog skupa je *skup svih stvari koje možemo definirati s manje od 19 riječi*. Budući smo upravo definirali ovaj skup koristeći samo 13 riječi, on pripada sâm sebi i zato je neobičan. Drugi primjer je skup svih stvari koje nisu vrapci. Dakle, i ovaj je skup neobičan.

Russell je pred Fregea postavio skup $\mathcal{E}$ svih običnih skupova. Je li skup $\mathcal{E}$ običan ili neobičan? Mora biti jedno od toga, a čini se da nije. Je li $\mathcal{E}$ običan skup? Ako jest, budući da je $\mathcal{E}$ klasa svih običnih skupova, onda pripada sâm sebi. No, to znači da je neobičan. U redu. Skup $\mathcal{E}$, dakle, mora biti neobičan. To znači da ne pripada sâm sebi, jer je skup običnih skupova. No, upravo to bi ga činilo

¹³Russellov termin za "neobični" skup je *impredikativni skup* – op. ur.

običnim! Bez obzira za koje se rješenje odlučimo, doći ćemo do proturječja!

Russellov paradoks je prvi rođak brojnim zabavnim zagonetkama. No, Fregu nije bilo zabavno kad je primio Russellovo pismo. Odmah mu je postalo jasno da se unutar sustava u kojem je razvio aritmetiku lako može izvesti proturječje. Matematički dokaz koji vodi u proturječje pokazuje da je jedna od premisa u zaključku neistinita. To pravilo stalno se koristi kao metoda u dokazivanju. Da bismo dokazali iskaz, pokazujemo da negacija tog iskaza vodi u proturječje. No kod jednog Fregea, proturječje je pokazalo da su same premise na kojima je izgrađen njegov sustav neodržive. Od tog udarca Frege se nikad nije oporavio.¹⁴

Frege i filozofija jezika

Godine 1892. Frege je u jednom filozofskom časopisu objavio rad pod naslovom *O smislu i značenju*.¹⁵ Filozofima je Frege toliko zanimljiv ne samo zbog logike, nego i zbog nekih pitanja koja se otvaraju u tom radu.

Istaknuo je da različite riječi možemo koristiti kako bismo imenovali ili označili iste točno određene predmete, iako one mogu imati prilično različit smisao, odnosno značenje. U njegovom poznatom primjeru koriste se izrazi "zvijezda Danica" i "zvijezda Večernjača". Njihov *smisao* je sasvim različit: jedna je sjajna zvijezda koju vidimo nakon zalaska sunca, a druga je ona koju vidimo prije izlaska sunca. No, i jedan i drugi izraz *označuje* isti predmet, istu planetu Veneru. Činjenica da se oba izraza odnose na isti predmet nije očigledna, to je svojedobno bilo pravo astronomsko otkriće. Frege se bavio i problemima supstitutivnosti: pogledajmo rečenicu

Venera je zvijezda Danica.

To je jako različito od

Venera je Venera.

Što jest slučaj, iako je zapravo ovdje jedna rečenica izvedena iz druge zamjenom jednog izraza drugim izrazom, koji označuje isti predmet.

Te su ideje početak jedne velike grane filozofije dvadesetog stoljeća, filozofije jezika.¹⁶ Može se reći da neki ključni pojmovi suvremenog računarstva potječu upravo iz tog eseja.¹⁷

Frege i Leibnizov san

Frege je vjerovao da njegov *Begriffsschrift* sadrži univerzalni jezik logike koji je tražio Leibniz. Njegova logika se zaista može baviti najrazličitijim područjima. No, to bi Leibniza vjerojatno razočaralo. Ona nije ispunjavala njegove želje u barem dva bitna aspekta. Leibniz je zamislio jezik kojim se ne izvode samo logičke dedukcije, nego jezik koji u sebi automatski sadržava i sve znanstvene i filozofske istine. Ovo je naivno očekivanje bilo zamislivo samo prije golemog razvoja znanosti u osamnaestom i devetnaestom stoljeću koji se, osim na na teoretskim promišljanjima, temeljio i na strogim eksperimentima.

Za nas je važnije ukazati na razna ograničenja Fregeove logike. Leibniz je tražio jezik koji bi istodobno bio i djelotvoran računski instrument, jezik koji bi omogućio da se logičko zaključivanje izvodi sustavno, izravnom manipulacijom simbolima. U Fregeovoj logici sve su dedukcije, osim najjednostavnijih, gotovo nesnosno komplicirane. Ne samo da su takve dedukcije zamorno dugačke: Fregeova pravila ne sadrže računске postupke za utvrđivanje može li se tražena konkluzija deducirati iz danih premisa u logici njegova *Begriffsschrift*a.

Begriffsschrift potpuno obuhvaća logiku koja se koristi u običnoj matematici i to je omogućilo da se i sama matematičku aktivnost

istražuje matematičkim metodama. Kao što ćemo vidjeti, ova su istraživanja dovela do vrlo značajnih i neočekivanih otkrića. Potraga za takvom računskom metodom, koja bi pokazala je li određen zaključak u Fregeovoj logici ispravan, kulminirala je 1936. godine dokazom da ne postoji takva općenita metoda. To je bila loša vijest za Leibnizov san. No, dok je dokazivao taj negativni rezultat, Alan Turing je otkrio nešto što bi oduševilo Leibniza. Shvatio je da je načelno moguće izraditi univerzalni stroj koji potpuno samostalno može izvesti svaki mogući izračun.

4 Cantor: zaobilaznicom kroz beskonačnost

Slijed brojeva $1, 2, 3, \dots$, takozvanih prirodnih brojeva, nastavlja se u beskonačnost. Bez obzira na to koliki je početni broj, uvijek možemo dobiti veći dodavanjem broja 1. Možemo zamisliti prirodne brojeve koji nastaju tako da ih, počinjući od 1, uzastopno zbrajamo s 1:

$$1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots, 99 + 1 = 100, \dots$$

Takav postupak, koji se nastavlja preko neke konačne granice, Aristotel je zvao potencijalna beskonačnost. Međutim, Aristotel nij htio prihvatiti kulminaciju tog postupka, a to je beskonačan skup svih prirodnih brojeva. To bi bila "dovršena" ili "stvarna" beskonačnost, a Aristotel ju je proglasio neopravdanom.¹ Aristotelovo je mišljenje jako utjecalo na skolastičke religijske filozofe dvanaestog stoljeća, posebno na Tomu Akvinskog. Problem prirode beskonačnog bio je mučan kako za matematičare, tako i za filozofe i teologe. Teolozi su tako smatrali da je dovršena beskonačnost zapravo jedan aspekt Boga te su zaključili da za ljude ona mora ostati tajnom. Leibniz nije bio obeshrabren takvim mišljenjima. Pisao je:

Ja se toliko zalažem za stvarnu beskonačnost da umjesto da se složim s uobičajenim mišljenjem kako Priroda prezire beskonačnost, ja smatram da se Priroda njome često služi kako bi djelotvornije pokazala savršenost svoga Tvorca.²

Limesi diferencijalnog računa, koji su postali tako važni za matematiku u osamnaestom i devetnaestom stoljeću, primjeri su potencijalne beskonačnosti. U vezi s tim, veliki njemački matematičar Friedrich Gauss (1777–1855) upozorava:

Prosvjedujem protiv upotrebe beskonačnih veličina kao *dovršeni*. To u matematici nije dopušteno. Beskonačno je samo izraz koji rabimo kad zapravo mislimo na limese.³

Za precizno formuliranje matematičkih problema koji su nikli iz napora druge polovice devetnaestog stoljeća, trebalo je koristiti dovršene beskonačnosti u njihovoj preciznoj formulaciji. Među matematičarima koji su se bavili tim problemom, Georg Cantor se jedini oglašio o Gaussovo upozorenje te je prihvatio izazov stvaranja temeljite i koherentne matematičke teorije stvarne beskonačnosti. Cantorov je rad izazvao buru kritika. Ne samo matematičari, već i filozofi i teolozi, napali su drskost onoga koji je metode iz matematičke znanosti prenio u dotad sveto područje beskonačnog. Frege je podržavao Cantora, uvidjevši važnost stvarno beskonačnog za budućnost matematike. Njemu je bilo prilično jasno da će doći do velikih borbi između matematičara koji su prihvatili Cantorovu beskonačnost i onih koji su je smatrali anatemom:

Jer beskonačno će na kraju odbiti da ga se izdvoji iz aritmetike. . . . Dakle, možemo predvidjeti da će ovo pitanje biti povod za tešku i presudnu bitku.⁴

Ono što Frege nije mogao predvidjeti dok je pisao ove redove, bilo je da će upravo temelji aritmetike koju je sâm razvio pasti kao

prva žrtva te bitke, žrtva paradoksa na kojeg će ga jedno desetljeće kasnije upozoriti Bertrand Russell u svom poznatom pismu, istog onog paradoksa koji je otkrio dok je istraživao implikacije Cantorovog beskonačnog. Frege svakako nije mogao ni zamisliti da će uslijediti žestoke rasprave, istraživanja i razmirice oko Cantorovog beskonačnog i da će upravo one jednog dana omogućiti ključne uvide koji će dovesti do razvoja svenamjenskih digitalnih računala.

Inženjer ili matematičar

Georg Cantor rođen je 1854. godine u Petrogradu u Rusiji, u neobičnom okruženju za budućeg profesora matematike na njemačkom Sveučilištu. Cantorova majka Marie Böhm došla je iz uvažene glazbene obitelji i bila je uspješna glazbenica. Njegov otac Georg Waldemar Cantor rođen je u Kopenhagenu, ali je kao dijete došao u Petrograd. Pretpostavlja se da je Georg odrastao u Petrogradu i da se tamo i školovao u jednoj evangeličkoj luteranskoj misiji. Iako je Marie primila rimokatoličko krštenje, i ona je nakon udaje pristupila Evangeličkoj crkvi, u kojoj su odgojeni Georg Cantor i njegova braća i sestre.⁵

Georg Waldemar Cantor bio je uspješan poslovni čovjek. Radio je kao komercijalist veleprodaje u Petrogradu, a kasnije je postao broker na burzi u istom gradu. Jedan je autor, potaknut pismima koja je Cantor dobivao za vrijeme studija, napisao:

Onaj širok, kulturni, zreo i uljudan čovjek oduševljava. Ona [pisma] odišu duhom koji ne nalazimo često među uspješnim poslovnim ljudima.⁶

Iako tuberkuloza, ta kuga devetnaestog stoljeća, osobito često napada siromašne četvrti, od nje nisu bili sigurni ni bogati. Cantorov



Georg Cantor

otac dobio je ovu strašnu bolest i na kraju je od nje i umro. Usprkos tome što mu je bilo tek četrdesetak godina, Georg Waldemar je zbog bolesti prestao raditi i obitelj se preselila u Njemačku. Njegov sin je tada imao jedanaest godina. No, očev je uspjeh bio takav da je poslije njegove smrti i čak sedam godina nakon selidbe, njegovo četvero djece bilo dobro zbrinuto.

Georg Waldemar je vjerovao da je struka koja najbolje odovara talentima njegovasina strojarstvo, ali je na Georgovu veliku radost na kraju popustio pred dječakovom željom da postane matematičar. U Berlinu je mladi Georg Cantor imao mogućnost studirati kod trojice velikih matematičara: Karla Weierstrassa, Ernsta Kummera i Leopolda Kroneckera. Cantora su u početku tanimala tradicionalna područja matematike i prema početku njegove karijere bilo bi teško predvidjeti da je predodređen revolucionarno proširiti horizonte matematičke misli ili da će njegov učitelj Kronecker postati Cantorov veliki nemeza koji će napadati njegovo životno djelo kao besmislicu.

Cantor je svoje prvo sveučilišno mjesto dobio u Halleu, industrijskom gradiću udaljenom oko 60 km uzvodno rijekom Saale od Fregeova doma u Jeni. U Njemačkoj toga doba bilo je za početnike u sveučilišnoj karijeri uobičajeno da dobiju mjesto *Privatdozenta*, predavača bez plaće. Jasno je da su u takvim uvjetima za započinjanje akademske karijere nužni bili nezavisni financijski izvori. Vođeci matematičar Hallea, Eduard Heine, prepoznao je velike Cantorove matematičke sposobnosti i nagovorio ga je da radi na nekim problemima koji uključuju beskonačne nizove. U prvom poglavlju susreli smo beskonačne nizove, to jest Leibnizov poznati niz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

“Beskonačnosti” koje susrećemo u takvim nizovima su samo potencijalne beskonačnosti, upravo onakve kakve je imao u vidu već

spomenuti Gauss. Za beskonačne nizove tražimo limes kojem se sve više približavamo ako dodajemo više članova (u slučaju Leibnizovog niza taj limes je $\frac{\pi}{4}$). Za niz kažemo da *teži* limesu. Tu nije u pitanju dovršena beskonačnost zato što u bilo kojoj točki postupka jednostavno dodajemo konačno mnogo brojeva.

Jasno je da je problematika beskonačnih nizova značajno napredovala u dva stoljeća nakon Leibnizovog doba. Cantor je proučavao *trigonometrijske nizove*⁷ (nazvane tako jer članovi uključuju sinus i kosinus iz trigonometrije). Htio je doznati pod kojim se okolnostima dva različita niza ove vrste mogu približiti istome i dokazati da bi takve okolnosti trebale biti veoma neobične. To ga je istraživanje odvelo vrlo daleko: shvatio je da se, ako želi dobiti tražene rezultate, prema beskonačnim skupovima mora odnositi kao prema zaokruženim cjelinama i na njima obavljati složene operacije. Uskoro je počeo razvijati teoriju skupova (njem. *Mengenlehre*) kao zasebno područje.

Beskonačnih skupova ima raznih veličina

Ako ima smisla baviti se skupom svih prirodnih brojeva, 1, 2, 3... , kao primjerom dovršene, stvarne beskonačnosti, ima li onda smisla pitati i koliko u tom skupu ima brojeva? Postoje li beskonačni brojevi kojima možemo izbrojiti beskonačne skupove? Leibniz nije imao primjedbi na dovršeno beskonačne veličine kao takve. Tim se pitanjem bavio u pismu katoličkom svećeniku, teologu i filozofu Nicolasu Malebrancheu. Zaključio je da takvi beskonačni brojevi ne postoje. Njegovo razmišljanje možemo objasniti na sljedeći način. Možemo reći da dva skupa imaju isti broj članova, bez da znamo taj broj, ako elemente jednog od ovih skupova pridružimo elementima drugog skupa, i to pridruživanjem jedan na jedan.* Na primjer, primijetimo li da u publici nema praz-

*Istu ideju imao je i Frege dok je bezuspješno pokušavao definirati broj.

nih mjesta i da nitko ne stoji, možemo (bez da brojimo) zaključiti da je broj ljudi u publici i broj mjesta u gledalištu jednak, ako samo povežemo svako mjesto s osobom koja ga je zauzela. Leibniz je smatrao da, ako postoji nešto kao beskonačni brojevi, onda bi se isto načelo trebalo primijeniti i na njih. Ako se pridruživanje jedan na jedan može definirati između dva beskonačna skupa, onda bismo morali moći zaključiti da ta dva skupa imaju jednak broj članova. Zatim je predložio primjenu ovog načela na sljedeća dva skupa: skup svih prirodnih brojeva $1, 2, 3, \dots$ i skup svih parnih prirodnih brojeva $2, 4, 6, \dots$. Lako je izvesti pridruživanje jedan na jedan između ova dva skupa. Svakom prirodnom broju pridružujemo dvostruko veći broj, na primjer

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & & \end{array}$$

Treba primijetiti da, iako su skupovi beskonačni, naznačeno pridruživanje između skupa svih prirodnih brojeva i skupa parnih brojeva je savršeno eksplicitno. Na primjer, prirodnom broju 117 odgovara parni broj 234, prirodnom broju 4228 odgovara parni broj 8456, itd. Leibniz je razmišljao ovako: ako postoji nešto takvo kao beskonačan broj, onda nas postojanje ovakvog pridruživanja tjera na zaključak da je broj prirodnih brojeva jednak broju parnih brojeva. Ali, kako je to moguće? Među prirodnim brojevima nisu samo parni brojevi, već i svi neparni brojevi, koji i sami čine jedan beskonačan skup. Jedno od osnovnih matematičkih načela, vratimo li se Euklidu, jest da je cjelina veća od bilo kojeg njenog dijela.⁸ Stoga je Leibniz zaključio da je sâm pojam broja svih prirodnih brojeva nekoherentan, to jest da nema smisla govoriti o broju elemenata u beskonačnom skupu. Kako je sâm rekao:

Za bilo koji broj postoji njemu odgovarajući parni broj koji mu je parnjak. Broj svih brojeva, dakle, nije veći od broja parnih brojeva, to jest cjelina nije veća od njezina dijela.⁹

Cantor je razmišljao slično Leibnizu i suočio se s istom dilemom: *ili* nema smisla govoriti o *broju* elemenata u beskonačnom skupu *ili* će neki beskonačni skupovi imati isti broj elemenata kao jedan od njegovih podskupova. No, Leibniz je odabrao jedan rog ove dileme, a Cantor drugi. Nadalje, pokušao je razviti teoriju brojeva koju bi primijenio na beskonačne skupove i time je prihvatio posljedice zaključka da beskonačan skup može imati isti broj elemenata kao jedan njegov dio.

Cantor je počeo tamo gdje je stao Leibniz. Proučavanje je započeo u području u kojem je bilo moguće uspostaviti pridruživanje jedan na jedan između dva beskonačna skupa. Dok je Leibniz otkrio da se pridruživanje jedan na jedan može uspostaviti između skupa prirodnih brojeva i jednog od njegovih podskupova (parnih brojeva), Cantor je proučavao skupove koji su, kako se čini, veći od skupa prirodnih brojeva. Primjer o kojem je razmišljao bio je skup brojeva koji se mogu prikazati kao (pozitivni) razlomci,¹⁰ kao što su $\frac{1}{2}$ ili $\frac{5}{3}$. Budući da prirodne brojeve možemo prikazati kao razlomke s nazivnikom 1 (kao što je $\frac{7}{1}$), skup prirodnih brojeva možemo smatrati podskupom ovog skupa. No, kad je malo razmislio, Cantor je shvatio da se članovi skupa tih razlomaka i skupa prirodnih brojeva mogu pridružiti jedan na jedan. Razlomci se mogu rasporediti u ovakav slijed

$$\left| \frac{1}{1} \right| \left| \frac{1}{2} \right| \left| \frac{2}{1} \right| \left| \frac{1}{3} \right| \left| \frac{2}{2} \right| \left| \frac{3}{1} \right| \left| \frac{1}{4} \right| \left| \frac{2}{3} \right| \left| \frac{3}{2} \right| \left| \frac{4}{1} \right| \left| \frac{1}{5} \right| \left| \frac{2}{4} \right| \left| \frac{3}{3} \right| \left| \frac{4}{2} \right| \left| \frac{5}{1} \right| \dots$$

Grupirani su prema zbroju brojnika i nazivnika svakog razlomka: prvo razlomci sa sumom 2 (postoji samo jedan takav), onda oni sa sumom 3 (postoje dva), zatim oni sa sumom 4 (postoje tri),

zatim oni sa sumom 5 (postoje četiri) itd. Sada je lako napraviti pridruživanje jedan na jedan s prirodnim brojevima:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{1}$	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Budući da nam se intuitivno čini da razlomaka ima puno više nego prirodnih brojeva, ova demonstracija bi nas lako mogla navesti da mislimo da se svaki beskonačan skup može pridružiti jedan na jedan sa skupom prirodnih brojeva. Cantorovo veliko dostignuće je što je pokazao da nije tako. Brojevi prikazani kao razlomci nazivaju se *racionalni*. Ako racionalni broj prikažemo kao decimalni, raspored znamenki na kraju će se početi ponavljati. Evo nekoliko primjera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0.33333333333333333333 \dots, \\ \frac{1}{4} &= 0.25000000000000000000 \dots, \\ \frac{5}{3} &= 1.66666666666666666666 \dots, \\ \frac{24}{11} &= 1.18181818181818181818 \dots, \\ \frac{9}{7} &= 1.2857142857142857142857 \dots\end{aligned}$$

Brojevi koje možemo prikazati kao decimalne, bez obzira hoće li se početi ponavljati, zovemo *realni brojevi*. One čiji se decimalni prikazi nikada ne ponavljaju zovemo *iracionalni*. Evo nekoliko primjera brojeva za koje je dokazano da su iracionalni:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095050\dots,$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.259921049894873160\dots,$$

$$\pi = 3.141592653589793240\dots,$$

$$2^{\sqrt{2}} = 2.665144142690225190\dots$$

Brojevi poput $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{2}$, kao i svi racionalni brojevi nazivaju se *algebarskima*, jer mogu biti rješenja algebarskih jednačbi. (Tako je $\sqrt{2}$ rješenje jednačbe $x^2 = 2$, a $\sqrt[3]{2}$ je rješenje jednačbe $x^3 = 2$.) Brojevi π i $2^{\sqrt{2}}$ dokazano ne zadovoljavaju nijednu algebarsku jednačbu. Takvi brojevi zovu se *transcendentalni*.

Nakon što je pokazao da se razlomci mogu pridružiti jedan na jedan s prirodnim brojevima, Cantor se okrenuo skupu svih algebarskih brojeva. Ni ovaj put nije bilo teško pronaći način da se algebarske brojeve pridruži s prirodnim brojevima jedan na jedan. Naravno upitao se vrijedi li to i za skup svih realnih brojeva. Kako si je dvadesetosmogodišnji Cantor time razbijao glavu, možemo pratiti u pismima koja je 1873. pisao Richardu Dedekindu, mladom matematičaru kojeg je Cantor posve slučajno susreo godinu dana prije na odmoru u Švicarskoj. Cantor, koji je tek bio postao profesor u Halleu, pisao je Dedekindu da je (kao što smo vidjeli) moguće izvesti pridruživanje jedan na jedan između prirodnih brojeva i manjeg skupa svih pozitivnih razlomaka. Čak je pokazao da isto vrijedi i za skup svih algebarskih brojeva. U jednom pismu Cantor postavlja pitanje o mogućnosti pridruživanja jedan na jedan između skupa svih prirodnih brojeva i skupa svih realnih brojeva. Iz Dedekindova odgovora naslućuje se da mu to pitanje nije bilo odviše zanimljivo. Nakon tjedan dana, u sljedećem pismu, Cantor je Dedekindu uspio dokazati značajnu činjenicu da skup realnih brojeva *ne možemo* pridružiti sa skupom prirodnih brojeva jedan na jedan i da postoje barem dvije veličine beskonačnih skupova.

Očito ni sâm Cantor nije bio siguran je li vrijedno objaviti to otkriće. Objavio ga je tek pošto ga je njegov bivši učitelj Karl Weierstrass potaknuo da to učini. Revolucionarne implikacije toga što je učinio Cantor bile su jedva vidljive u ovom radu od četiri stranice. Težište rada nije bilo na činjenici da beskonačni skupovi nisu svi jednako veliki, već je u vidu korolara Cantor došao do novog dokaza da postoje transcendentelni realni brojevi. Cantorov dokaz je obratio pažnju na činjenicu da budući se algebarski brojevi mogu pridružiti jedan na jedan s prirodnim brojevima, a realni ne mogu, znači da je skup realnih brojeva drugačiji od skupa algebarskih brojeva. Dakle, mora postojati realan broj koji nije algebarski, već transcendentalan.¹¹

U međuvremenu, Cantorov privatni život je cvjetao. Godine 1874. oženio se s Vally Guttman, bliskom prijateljicom svoje sestre i darovitom glazbenicom. Imali su šestero djece i bili su u svakom pogledu obitelj puna ljubavi i odanosti. Iako je Cantor u profesionalnim krugovima imao reputaciju osornog, čak problematičnog čovjeka, kod kuće je čini se bio veoma blag. Jedan opis objeda kod Cantorovih kaže:

„Za vrijeme objeda on bi mirno sjedio i puštao djeci da vode razgovor, a zatim bi ustao i zahvalio ženi za objed riječima: „Jesi li zadovoljna sa mnom i voliš li me?“¹²

No, kako je sve više radio na razvoju teorije skupova, nailazio je na sve veće protivljenje svojim uznemirujućim novim idejama. Njegov bivši učitelj Kronecker postao je posebno neumoran protivnik cijelog tog smjera Cantorovih istraživanja, čak je pokušao spriječiti objavljivanje nekih njegovih radova. U takvom okruženju nije bilo moguće dobiti mjesto na sveučilištu, a tamo je Cantor mogao imati kontakte sa sebi ravnim kolegama. Morao je ostati u mrtvilu Hallea. Čak je propao i pokušaj da nagovori svog prijatelja Dede-

kinda da dođe u Halle. Godine 1886. popustio je pred onim što je bilo neizbježno i kupio prelijepu kuću za svoju obitelj u Halleu.

Cantorova potraga za beskonačnim brojevima

Cantor nije obraćao pažnju na Gaussovo upozorenje da dovršena beskonačnost ne spada u matematiku. Privlačila ga je beskonačnost, a ona je bila područje teologa i metafizičara. Njegovo matematičko istraživanje osiguralo je temelje za radikalne ideje, ali on je išao puno dalje od onoga što je to istraživanje nalagalo. Prirodni brojevi 1, 2, 3, ... koriste se u običnom jeziku na dva različita, ali ipak povezana načina. Koristimo ih da bismo brojali i da bismo redali, kao što je vidljivo iz sljedećih rečenica:

- U ovoj sobi ima *četvero* ljudi.
- Joeov konj je stigao *četvrti*.

Tu razliku prepoznaje svakodnevni jezik razlikovanjem glavnih, ili kardinalnih, i rednih brojeva. Za njih postoje različite riječi: *jedan, dva, tri, ...* ali *prvi, drugi, treći, ...* Kardinalnim brojevima određujemo koliko predmeta ima u nekom skupu, a rednima kako su ti predmeti poredani. Cantorov pronalazak, da se među prirodnim i realnim brojevima ne može napraviti pridruživanje jedan na jedan, navela ga je na razmišljanje o beskonačnim kardinalnim brojevima, a rad na trigonometrijskim nizovima sugerirao mu je kako pojmiti beskonačne redne brojeve.

Cantor je pretpostavio da svaki skup (konačan ili beskonačan) ima svoj jedinstveni *kardinalni broj*. Smatrao je da ćemo kardinalni broj nekog skupa dobiti ako zanemarimo narav pojedinih elemenata koji čine taj skup, tako da dobijemo samo jedinice bez ikakvih posebnih obilježja. Ako na dva skupa možemo izvesti pridruživanje jedan na jedan, oni imaju isti kardinalni broj. Neka M bude neki

potpuno proizvoljni skup. Cantor je uveo notaciju $\overline{\overline{M}}$ za kardinalni broj toga skupa M .¹³ Na primjer,* ako

$$A = \{\clubsuit \diamond \heartsuit \spadesuit\}, \quad B = \{3, 6, 7, 8\}, \quad \text{ i } \quad C = \{6, 5\}$$

onda

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = 4 \quad \text{ i } \quad \overline{\overline{C}} = 2.$$

Naravno, lako je izvesti pridruživanje jedan na jedan između A i B :

$$\begin{array}{cccc} \clubsuit & \diamond & \heartsuit & \spadesuit \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Što ako dva skupa nemaju isti kardinalni broj? Simbolički, riječ je o skupovima M i N takvim da $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{N}}$. U takvom slučaju, jedan od dva kardinalna broja je veći, a drugi manji. Ako se poslužimo standardnim simbolima $<$ ("je manji od") i $>$ ("je veći od") i napišemo $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ (ili, ekvivalentno, $\overline{\overline{N}} > \overline{\overline{M}}$), naznačili smo da N ima veći kardinalni broj. Da bismo dokazali da je to doista tako, trebamo izvršiti pridruživanje jedan na jedan između skupa M i *neke* podskupa skupa N .¹⁴ Dakle, za gornji primjer u kojem imamo $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{C}}$ (jer je $4 > 2$), podskup $\{\diamond \heartsuit\}$ od A možemo pridružiti skupu C na sljedeći način:

$$\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \diamond & \heartsuit \end{array}$$

*Obratite pažnju na vitičaste zagrade $\{ \dots \}$ koje označuju da nabrojani elementi čine skup.

Dok smo u području konačnih skupova, ovo može izgledati samo kao pokušaj da nešto što je jednostavno i poznato izrazimo na teško razumljiv način. Korist koju možemo imati od Cantorovih ideja dolazi do izražaja tek ako ih počnemo koristiti za beskonačne skupove. Cantor je kardinalne brojeve beskonačnih skupova zvao *transfinitnima*. Njegov prvi primjer transfinitnog broja bio je kardinalni broj skupa prirodnih brojeva za koji je uveo simbol $\aleph_0$, koji obično čitamo "alef-nula". $\aleph$ je prvo slovo hebrejske abecede.*

Cantor je za kardinalni broj skupa realnih brojeva koristio simbol C i to zato što se skup realnih brojeva ponekad naziva kontinuumom. Bio je uvjeren da je upravo C transfinitni kardinalni broj koji slijedi nakon $\aleph_0$. Tvrdnja da je to istina, dakle da između $\aleph_0$ i C nema drugih kardinalnih brojeva poznata je pod nazivom *Cantorova hipoteza o kontinuumu*. Iako se time bavio godinama, nikako nije mogao ni dokazati ni opovrgnuti tu hipotezu. Taj neuspjeh uznemirio je Cantora preko svake mjere. Iz onoga što danas znamo, jasno je da jadni Cantor naletio na tvrd orah. Značajna otkrića do kojih su došli Kurt Gödel (1938) i Paul Cohen (1963), otkrila su da je hipotezu o kontinuumu nije moguće riješiti samo pomoću uobičajenih matematičkih metoda. ako ju je uopće moguće razriješiti. Stoga ne iznenađuje što Cantor nije mogao razriješiti to pitanje. Stručnjaci su čak i danas podijeljeni oko pitanja jesu li Gödel-Cohenovi negativni rezultati ono najbolje što možemo

*Mnogi su vjerovali da je Cantor Židov, možda baš zato što je koristio hebrejsku abecedu. Zapravo su njegovi roditelji bili kršćani i on je odrastao u luteranskoj vjeri. Kad se u nacističkoj Njemačkoj odlučivalo o prihvatljivosti Cantorove matematike, bilo je važno znati je li njezin autor židovskoga podrijetla. Neki razlozi nas navode da vjerujemo kako je po očevoj strani postojao neki predak Židov, kojeg su istjerali iz Portugala u zadnjem desetljeću petnaestog stoljeća. U pismu od 30. travnja sâm Cantor daje objašnjenje upotrebe hebrejske abecede (u mom prijevodu): "Činilo mi se da su za ovu namjenu druge abecede [već] previše iskorištene." (Primjerak toga pisma dugujem Shermanu Steinu.)

očekivati ili će možda nove, uspješnije metode dati bolje rezultate.

Rad na području trigonometrijskih nizova naveo je Cantora da razmišlja o određenom postupku koji uvijek iznova možemo primjenjivati postupno: prvi korak, drugi korak, treći korak itd. No, ono što je Cantora odvelo preko granice u transfinitno, bila je spoznaja da čak i nakon toliko puno koraka, uvijek postoji sljedeći. Ubrzo je počeo govoriti o ω -tom koraku i o $(\omega + 1)$ -tom koraku i dalje, te o razvoju aritmetike onoga što je on zvao *transfinitnim rednim brojevima*.^{*} Pogledajmo prvo konačan skup $\{\clubsuit \diamond \heartsuit\}$. Njegove članove možemo poredati na šest različitih načina:

1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
♣	♦	♥	♣	♥	♦	♦	♣	♥	♦	♥	♣	♥	♣	♦	♥	♦	♣

Svi ti načini imaju istu strukturu: *prvi element, drugi element, treći element*. To vrijedi za svaki konačni skup. Svi načini na koji se članovi konačnih skupova mogu poredati imaju istu strukturu. Ako se skup sastoji od n elemenata, bilo koji raspored tih elemenata imat će prvi element, drugi element, ... i konačno n -ti element. Cantor je primijetio da je kod beskonačnih skupova situacija potpuno drugačija. Beskonačni skupovi mogu biti poredani na različite načine i njihovi elementi mogu biti različito raspoređeni. Pretpostavimo, na primjer, da su prirodni brojevi 1, 2, 3, ... raspoređeni tako da svi parni brojevi prethode neparnima:

$$2, 4, 6, \dots 1, 3, 5, \dots$$

Ako pokušamo koristiti redne brojeve da bismo pokazali poziciju svakog elementa u nizu, vidjet ćemo da smo sve uobičajene konačne redne brojeve iskoristili za označavanje parnih brojeva:

^{*} ω je posljednje slovo grčkog alfabeta, a čita se "omega".

1.	2.	3.	...	?	?	?	...
↓	↓	↓		↓	↓	↓	
2	4	6	...	1	3	5	...

Cantor je za rješavanje ove poteškoće upotrijebio *transfinitne redne brojeve*. Tako je nakon svih konačnih rednih brojeva postavio prvi transfinitni redni broj koji je označio grčkim slovom ω . Zatim slijede $\omega + 1$, $\omega + 2$, itd. Sada je lako mogao osigurati pozicije za neparne brojeve iz gornjeg primjera:

1.	2.	3.	...	ω -ti	$(\omega + 1)$ -ti	$(\omega + 2)$ -ti	...
↓	↓	↓		↓	↓	↓	
2	4	6	...	1	3	5	

Cantor je shvatio da prirodne brojeve možemo poredati na puno različitih načina, ako koristimo sve veće transfinitne redne brojeve. Konačne (redne) brojeve, tj. prirodne brojeve 1, 2, 3, ..., nazvao je *prva klasa brojeva*, a transfinitne redne brojeve potrebne za određivanje pozicija različito poredanih prirodnih brojeva, *druga klasa brojeva*. Kad je riječ o skupu transfinitnih rednih brojeva, Cantor je njihov kardinalni broj označio simbolom $\aleph_1$. Značajno je da je uspio dokazati da je upravo $\aleph_1$ prvi sljedeći kardinalni broj nakon najmanjeg transfinitnog kardinalnog broja $\aleph_0$. Tako je $\aleph_1 > \aleph_0$ i nema kardinalnih brojeva koji bi bili veći od $\aleph_0$ i manji od $\aleph_1$.

Nadalje, hipoteza o kontinuumu koju je Cantor tako uporno pokušavao dokazati zapravo je tvrdnja da je C prvi sljedeći kardinalni broj nakon $\aleph_0$. Kako je znao da je $\aleph_1$ zaista sljedeći kardinalni broj nakon $\aleph_0$, hipoteza o kontinuumu svela se na sljedeće kratko pitanje:

$$C \stackrel{?}{=} \aleph_1$$

Na žalost, to što je uspio napisati ovu jednakost nije ga približilo dokazu o njezinoj istinitosti.

Postoji prva i druga klasa brojeva. Postoji li i treća klasa brojeva? Naravno da postoji! Da bismo rasporedili skupove s kardinalnim brojem $\aleph_1$, nisu nam dovoljni brojevi prve i druge klase. Cantor je uveo ω_1 kao transfinitni redni broj koji će započeti treću klasu brojeva, a kardinalni broj skupa svih rednih brojeva u ovoj trećoj klasi brojeva označio je s $\aleph_2$. Zatim se pokazalo da je $\aleph_2$ prvi sljedeći broj iza $\aleph_1$. Cantor je uvidio da ovom nizu nema kraja: nakon $\aleph_2$ dolazi $\aleph_3$ pa $\aleph_4$ itd. Nakon svih takvih brojeva dolazi $\aleph_\omega$ i tako dalje.

Dok je razvijao ove ideje, Cantor je zapravo istraživao potpuno novo područje. Nije bilo matematičkih pravila na koja se mogao osloniti. Morao ih je sam izmisliti, odnosno morao se pouzdati u vlastitu intuiciju. Ako uzmemo u obzir prirodu područja koje je istraživao, zadržavajuće je da se većina njegova djela dobro održala. No, od samog početka bilo je onih koji su se protivili Cantorovu pothvatu. Kroneckerovo protivljenje već smo spomenuli. Priča koja kruži među matematičarima i u koju mnogi vjeruju, kaže da je utjecajni francuski matematičar Henri Poincaré rekao da će se jednog dana Cantorova teorija skupova "smatrati bolešću od koje smo se oporavili". Iako nam se ta priča danas čini sumnjivom, sama činjenica da postoji dovoljno govori o tome s čime se Cantor suočavao.

Dijagonalna metoda

Ako današnji studenti uče o ijednom Cantorovom dostignuću, to je gotovo sigurno njegova takozvana dijagonalna metoda. Ona je objavljena 1891. godine u radu od svega četiri stranice, nakon Cantorovih upornih matematičkih istraživanja i nakon objavljivanja, čak i pponovnog tiskanja, njegovih završnih radova o transfinitnim brojevima. Godine 1874. Cantor je objavio dokaz da između prirodnih i realnih brojeva ne postoji pridruživanje jedan na je-

dan, ili kako se Cantor kasnije izražavao, $\aleph_0 < C$. U dokazu se poslužio metodama posuđenim iz Weierstrassove osnovne teorije limesa. Do istog zaključka možemo doći iz temeljnih principa logike, uz pomoć dijagonalne metode. Ta metoda će se neprestano pojavljivati u našoj priči.

Pri objašnjavanju dijagonalne metode korisno se poslužiti metaforom oznake na paketu. Ono što je zanimljivo je da su predmeti koje koristimo kao oznake isti kao predmeti u paketu. Uzmimo, kao primjer, četiri boje jednog špila igraćih karata: $\clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit$. Koristit ćemo svaku od njih kao "oznaku" na "paketu" koja sadrži neke od ovih boja, na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccc} \clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\diamondsuit \heartsuit\} & \{\diamondsuit \clubsuit\} & \{\diamondsuit \heartsuit \clubsuit\} & \{\clubsuit \diamondsuit\} \end{array}$$

Iste informacije možemo prikazati pomoću tablice u kojoj ćemo koristiti znak + kada želimo reći da je predmet u paketu, a znak – kada želimo reći da nije:

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\ominus$	+	+	–
$\diamondsuit$	–	$\oplus$	–	+
$\heartsuit$	–	+	$\oplus$	+
$\spadesuit$	+	+	–	$\ominus$

U ovoj tablici, okomiti stupac na lijevoj strani sadrži četiri oznake, a sadržaj paketa prikazan je u vodoravnim stupcima. Dijagonalno raspoređeni plusovi i minusi zaokruženi su da bi ih se naglasilo. Dijagonalna metoda je tehnika povezivanja iste vrste predmeta u novi paket. Sadržaj novog paketa je različit od sadržaja bilo kojeg označenog paketa. Evo kako se pravilo koristi: napravimo novu tablicu u koju ćemo za svaki znak umetnuti suprotni znak od onog u dijagonali. Budući da je – znak koji ide s $\clubsuit$,

u našoj će novoj tablici ♣ dobiti znak +. I dalje, ♦ dobiva znak –, ♥ dobiva – i konačno ♠ dobiva +. Ovako

	♣	♦	♥	♠
	+	–	–	+

Dakle, naš novi paket je {♣♠}. Kako možemo biti sigurni da je on različit od bilo kojeg drugog označenog paketa? Vrlo jednostavno. On ne može biti paket označen s ♣ zato što ♣ *nije* u tom paketu, a jest u našem novom paketu. Ne može biti ni paket označen s ♦, jer ♦ jest u tom paketu, a nije u našem novom paketu, i tako dalje.

Jasno je da su paketi zapravo skupovi. Označavanje je način uspostavljanja pridruživanja jedan na jedan između skupova i njihovih članova. Metoda je savršeno općenita: nije važno počinjemo li s konačnim ili beskonačnim skupovima. Ako svaki pojedini element tog skupa koristimo za označavanje određenog skupa načinjenog od nekih od tih elemenata, dijagonalnu metodu možemo koristiti za dobivanje novog skupa tih elemenata, različitog od svih skupova koje smo ranije označili.

Pogledajmo što bi se dogodilo ako počnemo sa skupom prirodnih brojeva 1, 2, 3, ... Zamislimo da smo neke elemente stavili u paket. Jedan se paket može sastojati samo od brojeva {7, 11, 17}. Drugi se može sastojati od svih parnih brojeva. Zamislimo da same prirodne brojeve koristimo kao oznake, kao u sljedećoj beskonačnoj matrici:

1	2	3	4	
↓	↓	↓	↓	
M_1	M_2	M_3	M_4	...

gdje su $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ paketi prirodnih brojeva. Sada ćemo, koristeći sljedeću tablicu, proizvesti naš novi skup M , različit od svih takvih skupova:

1	– ako je 1 u M_1 inače +
2	– ako je 2 u M_2 inače +
3	– ako je 3 u M_3 inače +
4	– ako je 4 u M_4 inače +
...	...

Drugim riječima, broj 1 je pripadnik skupa M samo u slučaju da 1 nije pripadnik skupa M_1 ; broj 2 je pripadnik skupa M samo ako nije pripadnik M_2 ; i tako dalje. Stoga je M skup prirodnih brojeva različitih od M_1 , različitih od M_2 i tako dalje. Nadalje, budući $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ predstavljaju bilo koje moguće pridruživanje jedan na jedan između brojeva 1, 2, 3, ... i skupova prirodnih brojeva, vidimo da *ni jedno takvo pridruživanje ne može uključivati sve skupove prirodnih brojeva*. Drugim riječima, kardinalni broj skupa svih skupova prirodnih brojeva je veći od $\aleph_0$. Zapravo, moguće je dokazati da je ovaj kardinalni broj upravo C , kardinalni broj skupa realnih brojeva.¹⁵ Tako je dijagonalna metoda zapravo novi način da se vidi kako realnih brojeva ima više nego prirodnih.

Ova metoda je toliko općenita da nam omogućuje da na nov način (drugačiji od slijeda Cantorovih brojeva $\aleph$) stvaramo još puno transfinitnih kardinalnih brojeva. Možemo, na primjer, zamisliti paket realnih brojeva označenih realnim brojevima. Dijagonalna metoda otkriva da nema označavanja koje može uključivati sve skupove realnih brojeva. Dakle, kardinalni broj skupa svih takvih skupova mora biti veći od C , kardinalnog broja skupa realnih brojeva.¹⁶ Nema potrebe da se ovdje zaustavimo. Pitanje o tome kako se ovako dobiveni kardinalni brojevi isprepliću s Cantorovim $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ ostaje izvorom poteškoća i nesuglasica sve do današnjeg dana.

Depresija i tragedija

Cantor je od početka svog rada nailazio na otpor zbog same ideje da konačna ljudska bića koja žive u konačnom svijetu mogu davati smislene iskaze o beskonačnom. I upravo oko kraja stoljeća stvari su se jako pogoršale, jer se otkrilo da mišljenje oslobođeno Cantorovim transfinitnim može dovesti do paradoksalnih, čak smiješnih rezultata. Nevolje su počele s pokušajima da se svi Cantorovi transfinitni kardinalni ili redni brojevi skupe u jedan skup. Ako postoji skup svih kardinalnih brojeva, koji bi bio njegov kardinalni broj? Ispostavilo se da bi on morao biti veći od bilo kojeg kardinalnog broja. Kako je to moguće? Kako jedan kardinalni broj može biti veći od svih ostalih kardinalnih brojeva?

Ubrzo nakon što je Cantor postao svjestan ovog uznemirujućeg paradoksa, talijanski matematičar Burali-Forti došao je do slične poteškoće dok se bavio skupom svih transfinitnih rednih brojeva. Pokazao je da bi takav skup vodio do transfinitnog rednog broja većeg od bilo kojeg drugog rednog broja, što je očito besmislen zaključak. A onda je na scenu stupio Bertrand Russell i zadao najšokantniji udarac od svih. On je razmišljao o pitanju: *Je li moguće da postoji skup svih skupova?* Ako takav skup postoji, što bi se dogodilo ako bismo na njega primijenili dijagonalnu metodu? Drugim riječima, što bi se dogodilo ako bismo se sjetili pakirati proizvoljne skupove tako da korištene skupove upotrijebimo za označavanje skupova? Naravno da bismo dobili skup drugačiji od svih onih koje smo označili. Upravo dok je razmišljao o takvoj mogućnosti, Bertrand Russell je došao do poznatog paradoksa skupa svih skupova koji nisu članovi samih sebe. To je onaj paradoks o kojem smo razmišljali u prošlom poglavlju, a kojeg je Russell saopćio potresenom Fregeu.

Iako ga je Russell otkrio dok je razmišljao o Cantorovim idejama, sam paradoks uopće nije vezan za razmišljanja koja se tiču

transfinitnih brojeva. Mnogim se matematičarima činilo da je i najosnovnije logičko zaključivanje postalo nepouzđano, ispunjeno zamkama. Ne iznenađuje što je većina matematičara nastavila normalno raditi daleko od ovih pitanja. No, za one koji su se bavili temeljnim pitanjima same prirode matematike, situacija je bila krizna u temeljima matematike. Ti matematičari i filozofi uskoro su se počeli dijeliti u dva oprečna usmjerenja. Jedni su smatrali teoriju skupova integralnim dijelom matematike koji se pod svaku cijenu mora sačuvati, a drugi su tražili da se matematiku izolira od zagađenja Cantorovim transfinitnim. Radovi logičara tijekom prva tri desetljeća dvadesetog stoljeća uglavnom su se bavili tim pitanjima.

Cantor je prvi u nizu ozbiljnih živčanih slomova dobio 1884. godine i patio je od jake depresije koja je trajala oko dva mjeseca. Kad se oporavio, svoje je mentalne probleme pripisao činjenici da je vrlo intenzivno radio na hipotezi o kontinuumu i svojim poteškoćama s Kroneckerom. U to je vrijeme čak pisao Kroneckeru i ponudio mu da obnove prijateljstvo, na što je Kronecker srdačno odgovorio. Objašnjenje koje je Cantor dao za svoje probleme bilo je široko prihvaćeno dugi niz godina, unatoč tome što je imao nekoliko epizoda onoga što danas smatramo bolešću manične depresije. Danas je općeprihvaćeno da je osnovni uzrok takvog poremećaja ukorijenjen u manjkavoj kemiji mozga, uz faktore okoline poput Cantorovih problema s Kroneckerom i hipotezom o kontinuumu, koji ubrzavaju, a ne uzrokuju veće poremećaje.¹⁷

Ova epizoda uglavnom je značila kraj Cantorovog pionirskog rada na području teorije skupova, osim već spomenutog rada na dijagonalnoj metodi. Cantor se između epizoda svoje teške mentalne bolesti sve više bavio filozofijom, teologijom, i ničim drugim nego pitanjem autorstva Shakespeareovih drama. Imao je vlastiti stav o značaju tih radova i o onima koji ga žele umanjiti, koji je graničio s paranojom. Godina 1899. bila je godina krize i tragedije

za Cantora. U njoj se prvo suočio s paradoksima teorije skupova, a nakon toga je doživio i užasan gubitak zbog smrti svog voljenog trinaestogodišnjeg sina.

Diletantski pristup ne bi bio svojstven Cantoru: postao je stručnjak za elizabetansko doba općenito i posebno za Shakespeareove drame. Objavio je nekoliko monografija koje ukazuju na to da je drame zapravo napisao Francis Bacon. To, naravno, nema veze s teorijom skupova ili s transfinitnim. Cantor je ipak smatrao da rad o beskonačnosti definitivno povezuje njegova filozofska i teološka istraživanja. Vjerovao je da onkraj transfinitnog postoji apsolutna beskonačnost i da je puko ljudsko shvaćanje nikada neće moći potpuno obuhvatiti. Iz te je perspektive shvaćao čak i izluđujuće paradokse koji su se pojavili u teoriji skupova. Na primjer, mnoštvo transfinitnih kardinalnih brojeva trebamo smatrati apsolutno beskonačnima, a proturječja su se i pojavila zato što su se oni shvaćali tek transfinitnim.

Presudna bitka?

Immanuel Kant je vrlo značajna osoba njemačke filozofske misli. Njegova kritička filozofija temelji se na dva ključna pitanja:

- Kako je moguća čista matematika?
- Kako je moguća čista prirodna znanost?

Kantov odgovor na prvo pitanje oslanjao se na ono što je nazivao "čistim zorom" prostora (za geometriju) i vremena (za aritmetiku). Smatrao je da ti zorovi potpuno ovise o iskustvu.¹⁸ Usprkos tome što je Kant naglašavao važnost znanosti, njemačka se postkantovska filozofija devetnaestog stoljeća razvila u drugom smjeru, prema apsolutnom idealizmu. U idealizmu su primarni *ideje* i *pojmovi* te se smatra da je svijet načinjen upravo od njih. Jedan od

vođa toga pokreta bio je Georg Wilhelm Friedrich Hegel, čijim su predavanjima prisustvovala stotine revnih učenika. Hegel ih je imao mnogo (među kojima su poznati Karl Marx i Friedrich Engels), a stručnjaci i danas smatraju da su njegovi spisi vrlo vrijedni. Međutim, Hegel je bio kadar koristiti se tako iskrivljenim zaključivanjem da danas izaziva podsmijeh, posebno u svojoj opsežnoj *Znanosti logike* u dva sveska. U njoj od čitatelja traži da duboko misle o sljedećem:

Ništa predstavlja običnu jednakost sa samim sobom.

Bitak je ništa.

Ništa je bitak.

Objektivne kategorije, u prijelazu s jedne na drugu, postupno prelaze u sljedeću kategoriju: *bivanje*.

U međuvremenu se u Njemačkoj potkraj stoljeća, djelomično potaknuta "pozitivističkim" idejama Augusta Comtea, a djelomično razvojem znanosti, razvijala nova "empiristička" filozofija. Za empirista su podaci dobiveni osjetilima osnovni elementi na temelju kojih treba razumjeti svijet. Cantor je ovaj empirizam shvaćao kao reakciju na besmislice poput Hegelovih, ali ga je smatrao primitivnim i suviše jednostavnim. Veliki znanstvenik Herman von Helmholtz, jedan od glavnih pobornika empirističke filozofije, htio je Kantovu središnju misao primijeniti na empirijsku znanost. Napisao je mali pamflet o brojanju i mjerenju koji je jako razljutio Georga Cantora. Godine 1887. Cantor je napisao članak koji se bavio transfinitnim brojevima s matematičkog filozofskog i teološkog stajališta i u njemu je napao taj pamflet. Smatrao je da on izražava "ekstremni empirijsko-psihološki pristup tako dogmatično, da jedva možete vjerovati da je to moguće". Nastavio je sljedećim prigovorima:

Tako u današnjoj Njemačkoj, kao reakcija na prerazmahan Kant-Fichte-Hegel-Schellingov idealizam, prevladava *akadem-*

sko-pozitivistički skepticizam. Skepticizam se proširio čak i na *aritmetiku* i u tom je području došao do sudbinskih zaključaka. To na kraju možda nanese najviše štete samom pozitivističkom skepticizmu.¹⁹

Zbirka Cantorovih radova o transfinitnom objavljena 1890. uključuje taj članak. Frege je imao zadatak recenzirati knjigu i odlučio je naglasiti gore navedenu opasku. U jednom značajnom odlomku (već citiranom na početku poglavlja), koji je tiskan samo desetljeće prije nego je primio razorno pismo Bertranda Russella, Frege je napisao:

Da, zaista! Upravo je to greben o koji će se ova doktrina razbiti. Naposljetku nećemo moći nijekati ulogu beskonačnog u aritmetici, a s druge strane ono ne može postojati uz ovakvu epistemološku tendenciju. Dakle, možemo pretpostaviti da će ovo pitanje biti povod za značajnu i presudnu bitku.²⁰

Georg Cantor umro je iznenada 6. siječnja 1918, dok je Prvi svjetski rat još uvijek bjesnio. Iako je bitka koju je Frege predvidio u svojoj vojničkoj metafori donijela mnoga iznenađenja, nije donijela nikakav presudan rezultat. Usputni proizvod te bitke koji možda najviše iznenađuje je matematički model svenamjenskog računala Alana Turinga.

5 Hilbert stiže u pomoć

George II, kralj Engleske, sin Leibnizovog posljednjeg pokrovitelja Georgea I, 1737. godine osnovao je sveučilište u srednjovjekovnom gradiću Göttingenu smještenom na rijeci Leine u središnjoj Njemačkoj. Gradske zidine, nekoliko gotičkih crkava i napola drvene kuće u starim ulicama u tom dražesnom gradiću preživjele su sve do danas. Sveučilište u Göttingenu ima slavnu tradiciju vrsne matematike još od devetnaestog stoljeća. Ono je udomilo takve matematičke veličine kao što su Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Lejeune Dirichlet i Felix Klein. No, dani istinske slave za matematiku došli su u dvadesetom stoljeću kad su, većinom privučeni ugledom Davida Hilberta, studenti dolazili odasvud u neprikosnoveni svjetski matematički centar. Göttingen je to bio sve do egzodusa uzrokovanog dolaskom Nacista na vlast u Njemačkoj 1933. godine.

U mojim studentskim danima kasnih četrdesetih, još su se s generacije na generaciju prenosile anegdote o Göttingenu iz dvadesetih godina. Slušali smo o okrutnim psinama koje je Carl Ludwig Siegel neprestano podvaljivao lakovjernom Bessel-Hagenu. Meni je najdraža priča o tome kako je Hilbert iz dana u dan dolazio u poderanim hlačama, zbog čega je mnogima bilo neugodno. Njegovom asistentu Richardu Courantu povjeren je zadatak da taktično obavijesti Hilberta o nastaloj situaciji. Kako je znao koliko Hilbert uživa šetati u prirodi i razgovarati o matematici, Courant ga je

pozvao u šetnju. Vodeći ga kroz trnovito grmlje Courant reče Hilbertu da je, vjerojatno na nekom grmu, poderao hlače. "Ma ne", odgovorio je Hilbert, "takve su već tjednima, samo nitko nije primijetio". To se događalo istih onih dvadesetih godina u kojima je Hilbert pokrenuo značajne akcije kako bi se matematiku iskoristilo za potvrđivanje sebe same. Neobičan slijed događaja vodio je od Hilbertove kampanje do uvida Alana Turinga o prirodi računanja.

David Hilbert rođen je i odrastao u protestantskoj obitelji u Königsbergu u istočnom dijelu Prusije, gradiću ponosnom što je bio dom filozofu Immanuelu Kantu. Godine 1870, dok je Bismarck poveo rat protiv Francuske Napoleona III i iskoristio veličanstvenu njemačku pobjedu kako bi ujedinio Njemačku u carstvo s pruskim kraljem kao Kaiserom, Hilbert je bio dijete od osam godina. Do vremena kad se upisao na studij matematike na Sveučilištu u Königsbergu, njegov izvanredni talent već je bio prepoznat i već je bio izgradio svoj osebujan stil učenja matematike kroz razgovor. Šetajući s prijateljima Hermannom Minkowskim i Adolfom Hurwitzom, cijelim putem bi razgovarao o matematici.¹

U dva stoljeća koja su prošla otkad su Leibniz i Newton otkrili diferencijalni račun i godina u kojima je David Hilbert postajao matematičar, mnoštvo matematičara je pronašlo velik broj sjajnih primjena limesa. Puno tih rezultata dobiveno je samo formalnom upotrebom simbola, bez mnogo razmišljanja o njihovu dubljem značenju. No, sredinom devetnaestog stoljeća došao je dan da se polože računi. Javljali su se problemi koji su zahtijevali shvaćanje samih pojmova koje nadilazi puko razumijevanje simbola. Na čelu tih pokušaja bili su Georg Cantor, njegov učitelj Karl Weierstrass i prijatelj Richard Dedekind.

Hilbert je 1888. otišao na put u velike matematičke centre u Njemačkoj da bi stupio u kontakt s vodećim ljudima iz svog područja. U Berlinu je posjetio Cantorovog nemezu Leopolda Kroneckera i obnovio poznanstvo koje je započelo dvije godine ranije. Kronec-

ker je bio veliki matematičar a neki njegovi radovi su bili ključni i za Hilbertova dostignuća. No, kako je Hermann Weyl, nekadašnji Hilbertov student, napisao u nekrologu pola stoljeća kasnije: Hilbert je smatrao da Kronecker koristi "svoju moć i autoritet da bi matematiku smjestio u Prokrustovu postelju prizvoljnih filozofskih načela". Ti su principi doveli Kroneckera do izrazito negativnog stava prema velikom dijelu matematike njegova vremena. Ne samo da je imao primjedbe na Cantorovo transfinitno, već se protivio i svim Weierstrassovim, Cantorovim i Dedekindovim pokušajima da uspostave čvrste temelje za limese diferencijalnog računa. Kronecker je te pokušaje odbacio kao beskorisne. On je izričito zahtijevao da matematički dokazi postojanja budu *konstruktivni*. To znači da je za Kroneckera dokaz o postojanju matematičkih entiteta koji zadovoljavaju određene uvjete prihvatljiv, ako ujedno sadrži i metodu po kojoj se ti entiteti mogu eksplicitno pokazati. Hilbert je svojim radom ubrzo osporio to načelo. Mnogo godina kasnije, objasnio je tu razliku studentima. Istaknuo je da je sasvim izvjesno da među studentima u predavaonici (od kojih očito nitko nije potpuno ćelav), postoji jedan student s najmanjim brojem dlaka na glavi, iako nemamo jasnu metodu pomoću koje bismo tog studenta prepoznali.²

Rane Hilbertove pobjede

Svijet se mijenja, ali neke stvari ostaju iste. Matematičari se često bave onime što ostaje isto, dok se druge stvari mijenjaju. U takvim slučajevima govore o stvarima koje su *konstantne* pod određenim *transformacijama*. Istraživanje onoga što se kasnije nazivalo algebarskim konstantama započeo je George Boole u jednom od svojih ranih radova.³ U zadnjoj četvrtini devetnaestog stoljeća algebarske konstante postale su središtem matematičkih istraživanja. Herojski pokušaji služenja algebrom pridonosili su problemu



David Hilbert

pronalaženja konstanti. Njemački matematičar Paul Gordan je bio istinski virtuoz u takvim nastojanjima. Njegovi suvremenici su ga čak nazivali "kraljem konstanti". Dok se provlačio kroz kompleksnosti algebre, Gordan je iznio postavku jednostavnog teorema o strukturi algebarskih konstanti. Prema Gordanovoj postavci, u svim konstantama određenog algebarskog izraza, uvijek će postojati točno određen broj ključnih konstanti pomoću kojih se sve ostale mogu izraziti jednostavnom formulom. Usprkos tom velikom otkriću, on je svoj teorem mogao dokazati samo za posebne slučajeve. Matematičari onog vremena ponajviše su se bavili Gordanovom postavkom i općenito se smatralo da će osoba koja ga bude mogla dokazati, biti virtuoz u algebri, sličan Gordanu. U takvom ozračju, dokaz Gordanove postavke kojeg je dao David Hilbert, bio je veliki šok. Umjesto složenih formalnih manipulacija, Hilbert se oslonio na moć apstraktnog mišljenja.

Hilberta je Gordanov problem zaokupio nakon što se osobno susreo s njegovim tvorcem. Rješenje do kojeg je došao nakon šest mjeseci rada oslanjalo se na iznimno općenit rezultat koji danas poznajemo kao *Hilbertov temeljni teorem*, a čiji je dokaz prilično jednostavan. Uz pomoć temeljnog teorema Hilbert je pokazao da pretpostavka da je Gordanova postavka neistinita vodi u proturječje. Ovaj sjajni dokaz Gordanove postavke nije mogao zadovoljiti Kroneckera zbog svoje nekonstruktivne prirode. Umjesto da nastavi popis ključnih Hilbertovih konstanti, ovaj dokaz je tek pokazao da bi pretpostavka po kojoj one ne postoje vodila u proturječje. No, dokazavši uspješnost apstraktnog mišljenja, Hilbertov je dokaz otvorio vrata matematici novog stoljeća. Općenitija perspektiva koju je otkrio Hilbertov dokaz imala je i jedan sporedni učinak. Nestala je klasična teorija algebarskih konstanti. Danas se Gordana uglavnom sjećamo po njegovoj reakciji na Hilbertov dokaz. "To nije matematika", uzviknuo je, "to je teologija".

Nakon senzacije do koje je dovelo Hilbertovo rješenje Gordanove postavke koje je odmah uvrstilo među prvoklasne matematičare njegova doba, Hilbert nije živio na staroj slavi. Prije nego je sasvim napustio teoriju konstanti, raščistio je neke detalje i dao još jedan potpuno konstruktivan dokaz Gordanove postavke.⁴ Osim toga, objavio je mnoštvo radova o različitim matematičkim temama. Jedan kratki rad napisao je u izrazito cantorovskom stilu koji bi Kronecker sigurno prezirao. Usprkos tome što je puno objavljivao, Hilbertova je karijera u praktičnom smislu i dalje stagnirala. Godinama je ostao *Privatdozent* u Königsbergu, ovisan o skromnoj zaradi od naknade što je od studenata primao za svoja predavanja. Jednom je čitav semestar držao predavanja jednom jedinom studentu, matematičaru iz Baltimora. U pismu svom dobrom prijatelju Minkowskom, Hilbert je ironično primijetio da se jedanaest docenata natjecalo za isto toliko studenata.

Godina 1892. donijela je neke bitne promjene u mladom Hilbertovu životu. Sve je počelo smrću šezdesetosmogodišnjeg Kroneckera netom pred Novu godinu i umirovljenjem Karla Weierstrassa. Zatvoreni svijet akademskog života matematike u Njemačkoj počeo se odmrzavati i to je bilo uzrok da se u njemačkoj matematici počne igrati igra koja je sličila podjeli katedri na muzičkim akademijama. Nakon što je šest godina bio *Privatdozent*, Hilbert je napokon dobio redovito akademsko mjesto u Königsbergu. Iste godine oženio se s Käthe Jerosch, svojom omiljenom plesnom partnericom. Godinu dana kasnije rodio mu se sin Franz. U međuvremenu je Felix Klein, vodeći matematičar fakulteta u Göttingenu, odlučio dovesti Hilberta na svoj Fakultet. Kleinovi su pokušaji uspjeli u proljeće 1895. i Hilbert se preselio u Göttingen gdje je ostao do smrti, četrdeset osam godina poslije.

Ako je Hilbertov sjajni dokaz Gordanove postavke uzrokovao kraj klasične teorije algebarskih konstanti, njegov opsežni *Zahlbericht* (doslovno "izvještaj o brojevima"), načinjen po narudžbi

Njemačkog matematičkog društva, širom je otvorio nove matematičke vidike. Društvo je očekivalo izvještaj o trenutnom stanju relativno nove matematičke grane, algebarske teorije brojeva (teme koju su mnogi matematičari smatrali zbunjujućom)⁵, a dobili su kritički promišljenju preradu tog područja od temeljnih načela. Pola stoljeća kasnije, dok sam ja bio student, jo uvijek smo sa zadovoljstvom proučavali to djelo i ono nam je bilo od koristi.

Kad je došao u Göttingen, Hilbert je imao pripremljena predavanja za kolegije iz različitih matematičkih tema, jer je već predavao kao docent u Königsbergu. Otto Blumenthal, prvi od šezdeset devetoro studenata čijoj je doktorskoj disertaciji Hilbert bio mentor, četrdeset godina poslije opisao je svoja živa sjećanja o dojmu koji je na njega ostavio Hilbert kad je došao u Göttingen: "Taj bistri čovjek srednjeg rasta, široke crvenkaste brade, odjeven u posve svakodnevnu odjeću, izgledao je prilično neprofesorski. . . [u usporedbi s drugim profesorima]." Blumenthal opisuje Hilbertova predavanja kao

vrlo jezgrovita, no prilično dosadno izlagana, s čestim ponavljanjima važnih tvrdnji. No, zbog bogatog sadržaja i jednostavne jasnoće izlaganja zaboravljali smo formu predavanja. Hilbert bi uvodio novestvari koje je sâm napravio, bez da to posebno naglašava. Bilo je očito da se jako trudio da ga svi razumiju. Predavao je studentima, a ne sebi.⁶

Studenti su bili zapanjeni kad su saznali da u zimskom semestru 1898. Hilbert namjerava držati kolegij pod naslovom "Elementi euklidske geometrije". Mislili su da je potpuno zaokupljen algebarskom teorijom broja i nisu imali pojma da bi ga mogle zanimati teme iz geometrije. Najavljena tema doimala se posebno čudnom zato što je euklidska geometrija ipak bila dio srednjoškolskog programa. Iznenadenje je raslo kad je kolegij otpočeo, gdje su studentima na potpuno nov način izloženi *temelji* geometrije.

To je bila prva naznaka Hilbertova dubokog interesa za *temelje matematike*. Upravo ćemo na taj interes posebno obratiti pažnju. U svojim je predavanjima Hilbert ponudio skup aksioma za geometriju, koji je popunio neke praznine u klasičnom Euklidovu pristupu. Naglašavao je apstraktnu prirodu te teme: isključivo uz pomoć logike moramo pokazati da teoremi slijede iz aksioma, bez da na nas utječe ono što možemo "vidjeti" gledanjem dijagrama. Jedna slavna anegdota kaže da je Hilbert navodno rekao da teoremi moraju važiti i ako umjesto točaka, linija i ravnina govorimo o "stolovima, stolicama i pivskim kriglama", dok god za te predmete pretpostavljamo da poštuju aksiome. I da konačno završimo s nabranjem njegovih uspjeha, Hilbert je dao dokaz za konzistentnost svojih dokaza, dakle dokaz da se pošavši od njih ne može stići do proturječja. Taj je dokaz pokazao da bi bilo koja nekonzistentnost u njegovom sustavu aksioma za geometriju, dovela do nekonzistentnosti aritmetike realnih brojeva. Tako je Hilbert *sveo* konzistentnost euklidske geometrije na konzistentnost aritmetike, a problem konzistentnosti aritmetike ostavio za neka buduća vremena!

Ususret novom stoljeću

Matematičari koji su bili prisutni na međunarodnoj konferenciji u Parizu kolovoza 1900. godine morali su se pitati što li će novo stoljeće donijeti njihovu području. Jednog je vrućeg dana tridesetomogodišnji David Hilbert, kojeg su njegovi sjajni uspjesi doveli u vrh profesije, održao zatraženi govor u kojem je predstavio izazov matematičarima dvadesetog stoljeća. To su bila dvadeset tri problema koja su se uz tadašnje metode, činila potpuno nerješivima.⁷ U provali njemu svojstvena optimizma Hilbert je obznanio kako svaki matematičar dijeli uvjerenje "da svaki točno određeni

matematički problem mora nužno biti podložen točno određenom rješenju. . . . Ovo uvjerenje . . . je snažan poticaj našem radu. U sebi čujemo neprestani poziv: *Postoji problem. Traži njegovo rješenje. Možeš ga naći čistim razumom*". Prvi problem na Hilbertovom popisu bio je odlučiti je li istinita Cantorova hipoteza o kontinuumu (tvrdnja da ne postoje skupovi čiji se kardinalni broj nalazi između kardinalnog broja skupa prirodnih brojeva i kardinalnog broja skupa svih skupova prirodnih brojeva). To je bila snažna potvrda Cantorovog transfinitnog u vremenu u kojemu su paradoksi prijetili da će opravdati Kroneckerov negativizam.

Drugi problem bio je upravo ono što je Hilbertov dokaz o konzistentnosti aksioma euklidske geometrije ostavio neriješenim – pokušati uspostaviti konzistentnost aksioma aritmetike realnih brojeva. Prethodni dokazi o konzistentnosti bili su dokazi *relativne konzistentnosti*, a to znači da su oni zapravo svodili konzistentnost jednog skupa aksioma na konzistentnost drugog. No, Hilbert je shvaćao da je s aritmetikom dosegnuo temelj logike i znao je da mu trebaju direktne metode. Taj mu je problem omogućio da objasni svoje stavove o značenju *egzistencije* u matematici. Dok je Kronecker obznanio kako dokazivanje matematičkih entiteta zahtijeva metodu za stvaranje ili izlaganje dotičnih predmeta, za Hilberta je postojanje zahtijevalo samo dokaz da ako pretpostavimo postojanje takvih predmeta nećemo doći do proturječja: "ako primjenom konačnog broja logičkih procesa možemo dokazati da oznake koje pripisujemo nekom pojmu nikako ne mogu dovesti do proturječja, onda smatram da je matematičko postojanje tog pojma . . . time dokazano". Hilbert smatra da proturječje koje nastaje ako pretpostavimo postojanje skupa svih Cantorovih transfinitnih kardinalnih brojeva, samo pokazuje da takav skup ne postoji. Poteškoće s temeljima matematike počele su se shvaćati kao nešto važno, a problem konzistentnosti aritmetike postajao je sve teži, posebno nakon što se pročulo za paradoks koji je Ber-

trand Russell saopćio Fregeu u svom razornom pismu iz 1902. Tek su se dvadesetih godina Hilbert i njegovi studenti i sljedbenici otvoreno suprotstavili ovom problemu, što je dovelo do posve nepredvidljivih posljedica.

Skup problema koje je Hilbert iznio 1900. godine fascinirao je generacije matematičara. Ti su problemi obuhvaćali veoma različite teme iz čiste i primijenjene matematike i najavili su opseg Hilbertovih budućih doprinosa. Hermann Weyl je u nekrologu o Hilbertu rekao da je svatko tko je riješio jedan od problema s Hilbertova popisa, samim time ušao u "počasnu skupinu matematičke zajednice". Godine 1974. Američko matematičko društvo sponzoriralo je poseban simpozij (imao sam čast sudjelovati na njemu) na koji su stručnjaci pozvani da govore o matematičkim otkrićima koja su proteklih godina nikla iz tih problema. Plodnost Hilbertovih problema vidljiva je iz činjenice da su izvještaji s tog simpozija objavljeni u zborniku od preko šest stotina stranica.⁸

Kroneckerov duh

Nelagoda koju su osjećali mnogi matematičari prema Cantorovom transfinitnom i prema čitavom smjeru istraživanja temelja, došla je do vrhunca objavljivanjem proturječja koje je pronašao Bertrand Russell u onome što se činilo jednostavnim zaključivanjem. Kao što smo već vidjeli, Frege je jednostavno odustao od svog životnog djela nakon što je primio pismo koje je sadržavalo Russellov paradoks. Možemo samo nagađati da li se sjećao proročanstva koje je bio izrekao deset godina prije:

Jer, ne možemo nijekati ulogu beskonačnog u aritmetici; ...
Dakle, možemo predvidjeti da će ovo pitanje biti povod za značajnu i presudnu bitku.⁹

Iako su se Frege i Cantorov prijatelj Dedekind povukli iz bitke, nije nedostajalo ratnika koji bi bilo voljni učli u sukob. Početkom dvadesetog stoljeća Hilbert i Henri Poincaré smatrali su se dvojicom najvećih živućih matematičara i obojica su se sa zadovoljstvom bavila tim područjem, ali sa suprotnih stajališta. Nakon 1900. godine, sljedeći Međunarodni kongres matematičara održao se 1904. dvije godine nakon što je Russell objavio svoj paradoks. Obraćajući se skupu, on je jasno iznio svoj pristup krizi. Iznio je plan za mogući dokaz konzistentnosti aritmetike.¹⁰ Nije zanemario dodati da bi se taj dokaz mogao proširiti tako da obuhvati i Cantorovo transfinitno. Poincaré je brzo primijetio da je Hilbertov zaključak bio cirkularan: iste metode koje je dokaz trebao opravdati, korištene su u navodnom dokazu po kojem te metode ne mogu voditi u proturječje. Prošlo je nekoliko godina prije nego što će se Hilbert složiti s tom primjedbom. Poincaré je smatrao da je ono što je zvao "kantorizam" donekle korisno, ali je ipak ustrajao na tome da "[n]ema stvarne (dakle, dovršene) beskonačnosti [Poincaréov kurziv]. Kantorovci su to zaboravili i završili su u proturječju".¹¹ U Poincaréovoj izjavi čuje se odjek riječi što je Gauss napisao oko osam desetljeća ranije, a koje smo citirali u prethodnom poglavlju: "Protestiram prije svega protiv upotrebe beskonačnih veličina kao *dovršених*. To u matematici nije dozvoljeno." Cantorovo sjajno životno djelo bilo je herojski izazov toj tradiciji.

Bertrand Russell nije spadao u ljude koji bi se povukli s bojišta. Ustrajno je radio na sustavu simboličke logike u kojem bi se mogao ostvariti Fregeov projekt svođenja aritmetike na čistu logiku a da se pritom ne upadne u paradokse. U izvještavanju suvremenika o svojim nastojanjima od velike mu je pomoći bila simbolizacija koju je uveo talijanski logičar Giuseppe Peano (u biti ona koju smo uveli u trećem poglavlju), u koju je daleko lakše proniknuti nego što je to slučaj s Fregeovom notacijom. Poincaré je oštro napao Russellova nastojanja:

Teško je vidjeti da riječ *ako*, kad je pišemo kao $\supset$, dobiva neku vrijednost koju nije imala dok smo je pisali kao *ako*.¹²

Poincaré nije propustio spomenuti ni to, da ako Russellova nastojanja uzmemo ozbiljno otvaramo mogućnost da se matematika svede na puko izračunavanje (Leibnizov san!), da bi samu tu zamisao potom ismijao:

Stoga možemo lako zaključiti da, kako bismo dokazali teorem, nije nužno ili čak korisno znati što on znači. . . možemo zamisliti stroj u koji bismo na jedan kraj stavili aksiome, a s drugog kraja izvlačili teoreme, poput onog legendarnog stroja u Chicagu u koji s jedne strane stavljamo žive svinje, da bi iz njega izašle kao šunke i kobasice. Kao što tom stroju nije važno da zna što radi, tako nije ni matematičaru.¹³

Nastojanje Bertranda Russella da oživi Fregeov program pretvorilo se u monumentalno djelo u tri sveska *Principia Mathematica* (objavljeno 1910–1913), autora Bertranda Russella i Alfreda Northa Whiteheada. To je djelo započelo čistom logikom Fregeovog *Begriffsschrift*a, a završilo je u potpuno matematičkom području, uz jednostavne direktne međukorake, u duhu Poincaréovog čikaškog stroja. Paradoksi su izbjegnuti pomoću razrađene glomazne strukture slojeva u kojoj svaki skup može imati članove iz samo jednog sloja. To raslojavanje je toliko sputalo običnu matematiku, da je načinjen poseban, prilično sumnjiv *aksiom svodivosti*, kako bi se srušile ograde koje su nastale u međuslojevima.¹⁴ *Principia* je bila opterećena i unutarnjom zbrkom. Dok je Frege jasno shvaćao kako ima posla s dvije razine jezika, novim formalnim jezikom koji je stvarao, i običnim jezikom u kojem možemo govoriti o ovom jeziku, Whitehead–Russellovo djelo je u tom pogledu nejasno, i te dvije razine u njemu se miješaju.¹⁵ To je značilo da se problem konzistentnosti čitave strukture, Hilbertu ključan, u Russellovu kontekstu ne bi ni pojavio. Usprkos tome, *Principia* je bila značajno

dostignuće koje je jedanput zauvijek pokazalo da je moguće izvesti potpunu formalizaciju matematike u sustavu simboličke logike.

Dok je Bertrand Russell tražio logičku osnovu za čitavu klasičnu matematiku, a da pritom izbjegne paradokse, sjajni mladi nizozemski matematičar L. E. J. Brouwer uvjerio se da je većina toga neizbježno pogrešna i da to treba odbaciti. Brouwerova doktorska disertacija iz 1907. godine pokazivala je takvo neprijateljstvo prema Cantorovom transfinitnom i prema mnogim stvarima iz suvremene matematičke prakse, da bismo mogli pomisliti da ga je opsjeo Kroneckerov duh. Brouwer se 1905. privremeno prestao baviti matematikom da bi objavio kratku knjigu *Life, Art and Mysticism*, uronjenu u romantični pesimizam. Nakon što je opisao život u ovom "tužnom svijetu" kao *privid*, ovaj je mrzovoljni mladić zaključio:

Pogledaj ovaj svijet pun bijednika koji misle da nešto imaju, . . . a ne mogu se nasititi znanja, moći, zdravlja, slave i zadovoljstva.

Samo onaj tko shvaća da nema ništa, da ništa ni ne može imati, da ne može dokučiti sigurnost, koji se potpuno predaje i sve žrtvuje, koji sve daje, koji ništa ne zna, koji ništa ne želi, koji sve napušta i zanemaruje, dobit će sve. Njemu je otvoren svijet slobode, svijet bezbolne kontemplacije i – ničega.¹⁶

Bez obzira na činjenicu što je mislio sve najbolje o životu punom odricanja, Brouwer se, kako bi zadovoljio svoja filozofska uvjerenja, upustio u pravednički pothvat rekonstruiranja matematičke prakse od njezinih temelja. Iako je mogao izabrati neku tradicionalnu matematičku temu, on je odlučio pisati doktorsku disertaciju na temu o temeljima matematike.¹⁷ Njegov se mentor nevoljko složio i bio je zaprepašten zahtjevom svog studenta da u disertaciju uvede čudne i nevažne ideje, pa je napisao:

Još jednom sam razmislio mogu li prihvatiti drugo poglavlje ovakvo kakvo jest. Iskreno, Brouweru, ne mogu. Smatram da

je cijelo prožeto nekim pesimizmom i mističnim stavom prema životu, a to nije matematika niti ima ikakve veze s temeljima matematike.¹⁸

Brouwer je smatrao da matematika postoji u svijesti matematičara te je prvotno izvedena iz *vremena* kao "matematička prvobitna intuicija". Realna matematika nalazi se u matematičarevoj intuiciji, a ne u njezinu izrazu u jeziku. Daleko od toga da je matematika logika (kao što su tvrdili Frege i Russell), i sama logika je izvedena iz matematike. Za Brouwera, Cantorovo uvjerenje da je pronašao različite veličine beskonačnosti bila je besmislica, a njegov problem kontinuuma trivijalnost. Hilbert je bio u krivu kad je tvrdio da je za matematičko postojanje potrebna samo konzistentnost. Upravo suprotno:

postojati [Brouwerov kurziv] u matematici znači: biti konstruiran pomoću intuicije; pitanje je li određeni jezik konzistentan ne samo da je po sebi nevažno, ono nije niti ispit matematičke egzistencije.¹⁹

Brouwer je, odgovarajući na Kroneckerov poziva na konstrukciju kao jedinu ispravnu metodu za uspostavljanje postojanja u matematici, osporio upotrebu temeljnog zakona logike, Aristotelova zakona *isključenja trećeg* (koji jednostavno tvrdi da je bilo koji iskaz ili istinit ili neistinit) primijenjenog na beskonačne skupove.²⁰ Brouwer je smatrao da za neke iskaze ne možemo reći ni da su istiniti ni da su neistiniti, za njih trenutno ne postoji metoda po kojoj možemo odlučiti o njihovoj istinitosti. Hilbertov dokaz Gordanove postavke je izvorno koristio zakon isključenja trećeg na način uobičajen za matematičare: pokazao je da bi nijekanje te postavke vodilo u proturječje. Brouweru je takav dokaz bio neprihvatljiv.

Nakon što je završio disertaciju, Brouwer je svjesno odlučio privremeno sakriti svoje sporne ideje i usredotočiti se na pokazivanje

svoje matematičke vještine. Područje koje je izabrao bilo je novo područje topologije. Došao je do nekoliko dubokih uvida, uključujući važni *teorem čvrste točke*.^{*} Godine 1910. dvadesetdevetogodišnji Brouwer objavljuje svoj temeljni princip i stječe Hilbertovo divljenje. Davida Hilberta mladić se bio izuzetno dojmio, čak ga je pozvao da se pridruži uredništvu svog cijenjenog časopisa *Mathematische Annalen*, što je kasnije zažalio. Nakon što je dobio stalno mjesto na Sveučilištu u Amsterdamu 1912. (uz Hilbertovu pomoć, on je naime bio jedan od onih koji su pisali Brouweru u prilog), Brouwer se osjetio slobodnim vratiti se svom revolucionarnom projektu koji je sada zvao *intuicionizam*.

Hermann Weyl bio je Hilbertov cijenjeni učenik, jedan od velikih matematičara stoljeća i onaj koji je na koncu izabran da zamijeni Hilberta u Göttingenu. Njegovi interesi su obuhvaćali matematiku, fiziku, filozofiju pa čak i umjetnost. Na Hilbertovu žalost, Weyl je bio uvjeren da su temelji za rad s limesima, koje su uspostavili Weierstrass, Cantor i Dedekind, klimavi. Nije mogao povjerovati u sustav realnih brojeva na kojem se sve temeljilo. Čitavo je zdanje, kako kaže njegova poznata izjava, "kula u pijesku".²¹ Weylov pokušaj rekonstrukcije kontinuuma realnih brojeva, *Das Kontinuum* na koncu ga nije zadovoljilo, ali mu se svidjelo Brouwerovo rješenje. Izjavio je: "... Brouwer, to je revolucija." To je bilo previše za Hilberta koji je možda pomislio: "Zar i ti, sine Brute?" Dvadesete su zaista bile revolucionarne godine u Njemačkoj. Izgubila je Prvi svjetski rat i bila je prisiljena prihvatiti ponižavajući Versailleski sporazum. Socijaldemokratsku vladu, koja je preuzela vlast nakon što se car odrekao prijestolja, mučili su teški ekonomski problemi, a pokušavali su je svrgnuti i s lijeva i s desna. Žestoke

^{*}Nobelovu nagradu za ekonomiju 1994. dobilo je troje ljudi, dva ekonomista i matematičar John Nash. Nash je nagrađen za teorem iz svoje doktorske disertacije iz 1950. koji je višestruko primjenjiv u ekonomiji i drugim područjima. U svojoj disertaciji Nash je vješto iskoristio Brouwerov teorem čvrste točke.

riječi izgovarane su sa svih strana. U takvom okruženju čovjek se lako zanese pa je Hilbert u jednom govoru 1922. godine na disertaciju svog bivšeg studenta reagirao kao na izdaju:

Ono što rade Weyl i Brouwer zapravo se svodi na hod Kroneckerovim stazama: oni žele doći do temelja matematike. Zato bacaju preko palube sve ono što im ne odgovara i proglašavaju embargo à la Kronecker. Ali, to zapravo znači raskomadati i osakatiti našu znanost i ako budemo slijedili takve reformatore, možda ćemo izgubiti velik dio našeg najvrednijeg blaga. Weyl i Brouwer izopćuju opći pojam iracionalnog broja, funkcije, pa čak i funkcije teorije brojeva, Cantorove [redne] brojeve viših brojevnih klasa, itd. Teorem po kojemu između beskonačno mnogo prirodnih brojeva uvijek postoji najmanji, čak i logički zakon isključenja trećeg – na primjer postoji li samo određeni broj kardinalnih brojeva ili ih je beskonačno mnogo – sve su to primjeri zabranjenih teorema i načina zaključivanja. Kronecker nije mogao ukinuti iracionalne brojeve (Weyl i Brouwer nam dopuštaju tu nedovršenost), ali to ne bismo mogli učiniti ni danas. Ne! Brouwerov [program] nije revolucija, kao što to misli Weyl, već samo ponovljeni pokušaj puča novim metodama i s većim zanosom, ali koji je ipak potpuno propao. Posebno danas, kad se ova država dobro utvrdila djelima Fregea, Dedekinda i Cantora, ti pokušaji su osuđeni na propast.²²

Primijetimo li ratnički prizvuk Hilbertove kritike, mogli bismo pomisliti da je i on bio jedan od brojnih Evropljana koji su s ludom euforijom pozdravili dolazak rata 1914. godine. No, bilo je upravo suprotno. Od početka je jasno davao do znanja da rat smatra glupošću. U kolovozu 1914, devedeset i tri poznata njemačka intelektualca obratila su se "civiliziranom svijetu" manifestom kojim su odgovorili na bijes Engleske, Francuske i Sjedinjenih Država zbog akcija njemačke vojske u Belgiji. Oni su tvrdili: "Nije istina da smo zločinački ugrozili neutralnost Belgije . . . Nije istina da su

našetrpe brutalno uništile Louvain." Potpis je zatražen i od Hilberta, ali on ga je odbio dati. Rekao je da ne zna jesu li te optužbe istinite. Godine 1917, pet godina prije Hilbertove kritike Weyla i Brouwera, dok krvavi rovovski rat još gutao jedan naraštaj Evropljana, Hilbert je objavio pohvalan nekrolog o velikom francuskom matematičaru Gastonu Darbouxu, koji je bio netom preminuo. Oko njegove kuće su se okupili studenti koji su zahtijevali da se ovaj spomen na "neprijateljskog matematičara" zaniječe, a Hilbert je zatražio službenu ispriku koju je kasnije i dobio.²³ Mnogi su se suprotstavljali prijedlogu da sjajna mlada matematičarka Emmy Noether bude imenovana *Privatdozentom* u Göttingenu, zato što bi onda žena mogla postati profesor i član senata Sveučilišta, a Hilbert je izjavio: "Ne vidim kako spol kandidata može biti argument protiv njezina primanja na mjesto Privatdozenta. Pa senat nije javno kupalište."²⁴ U rujnu 1917, dok su se Njemačka i njezin susjed Francuska jako trudile da jedna drugoj pobiju stanovnike, Hilbert je održao predavanje u Zürichu pod naslovom "Aksiomatsko mišljenje". Ono je počelo provokativnom rečenicom:

Upravo kao i u ljudskim životima, jedan narod može napredovati samo ako i njegovi susjedi napreduju. Kao što je interes naroda traži ne samo da vlada red u svakom pojedinom narodu, već i da odnosi među narodima budu pravilno uređeni, tako je i u životu znanosti.²⁵

Metamatematika

Problem konzistentnosti aritmetike naveden je kao drugi problem u Hilbertovom govoru na Međunarodnom kongresu matematičara 1900. godine. No, Hilbert ozbiljno pristupa ovom problemu tek dvadesetih godina. Njegov student, Wilhelm Ackermann i asistent Paul Bernays, usko su surađivali s njim, a svoj doprinos

dao je i John von Neumann.* Hilbert je započeo logičkim sustavom iz Whitehead–Russellove knjige *Principia Mathematica* i krenuo je za Frege–Russellovim ciljem definiranja broja samo uz pomoć čiste logike. No, ubrzo je napustio taj cilj shvativši da je neodrživ, ali je simboličku logiku koju su oni razvili i dalje smatrao važnom. U novom Hilbertovu programu, matematika i logika razvijat će se zajedno u potpuno formalnom simboličkom jeziku. Takav jezik možemo promatrati “iznutra” ili “izvana”. Iznutra, on je samo matematika u kojoj je svaki i najmanji korak u zaključivanju potpuno jasan. No, iznutra je on mnoštvo formula i manipulacija simbolima, koje možemo obavljati a da ne obraćamo pažnju na to što ti simboli znače. Zadatak je bio dokazati da nijedan par formula koje jasno proturječe jedna drugoj, ne može biti izveden u ovom jeziku odnosno (kako se kasnije pokazalo) da formule kakve su $1 = 0$ ili $0 \neq 0$ nisu izvedive.

Bilo je nužno suočiti se s kritikama Poincaréa i Brouwera: ništa korisno ne možemo dobiti od dokaza o konzistentnosti koji se oslanja upravo na one metode koje treba utvrditi. Hilbertova hrabra ideja je zapravo bila potpuno nova vrsta matematike koju je on zvao *metamatematika* ili *teorija dokaza*. Traženi dokaz konzistentnosti izvest će se u metamatematici. Dok će unutar formalnog sustava biti dozvoljeno puno korištenje matematičkih metoda svih vrsta bez ograničenja, metamatematičke metode ograničit će se na neosporive metode, koje je Hilbert nazivao “konačnima”. Hilbert

*John von Neumann, jedan od najvećih matematičara dvadesetog stoljeća, rođen je u Budimpešti 1903. godine. Bio je čudo od djeteta, a rođen je u bogatoj obitelji u kojoj je mogao i htio njegovati svoj talent. Radio je na najrazličitijim područjima čiste i primijenjene matematike (uključujući i matematičku fiziku i ekonomiju). Postao je član Instituta za napredna istraživanja odmah po osnutku 1933. i ostao je to sve do smrti 1957. godine. Za vrijeme Drugog svjetskog rata bio je jako angažiran u vojnoj problematici, uključujući i projekt atomske bombe u Los Alamosu. Taj se interes nastavio i u vrijeme hladnog rata i konačno doveo do stvaranja napredne računalne opreme.

se nadao da će s podsmijehom moći reći Weylu i Brouweru: Dokazao sam da matematičari nikada neće doći do proturječja dok se budu koristili svojim uobičajenim metodama. To sam uspio dokazati pomoću metoda koje čak i vi odobravate. Ili, von Neumanovim riječima: "Teorija dokaza bi trebala izgraditi, da se tako izrazimo, klasičnu matematiku na intuicionističkim osnovama i tako dokazati apsurdnost intuicionizma."²⁶

Među matematičkim "blagom" koje bi osigurale njegove metode, Hilbert je posebno uključio Cantorove transfinitne brojeve, za koje je rekao "Čini mi se da je to najljepši svijet matematičkog intelekta i općenito jednim od najviših dosega čistog ljudskog razuma".²⁷ Odbacujući kritike Brouwera i Weyla, najavio je: "Nitko nas neće moći odvojiti od raja koji je za nas stvorio Cantor."²⁸ Spremnost da se prizna Hilbertov program, nije se dojmila Brouwera: "... time nećemo dobiti ništa matematički vrijedno. Netočna teorija nije ništa manje netočna samo zato što je ne možemo pobiti nekim proturječjem, kao što ni zločinačka djelatnost nije ništa manje zločinačka čak i ako je ne može spriječiti neki sud koji bi joj stao na kraj."²⁹

Bitka riječima između Hilberta i Brouwera prerasla je u djela kad je Hilbert posegnuo za kvazi-pravnim sredstvima da izbaci Brouwera iz uredništva *Mathematische Annalen*, zbog čega je Albert Einstein počeo gundati o borbi "žabe i miša".³⁰ Borba mišljenja između Hilberta i njegovih suradnika s jedna strane, a Brouwera i Weyla s druge, imala je korijene u temeljnom filozofskom pitanju o prirodi spoznaje. Na oba mišljenja jako su utjecale ideje Immanuel Kanta. Za razliku od mnogo filozofskih raspri, Hilbertovo i Brouwerovo mišljenje uobličeno je u *programme*, koji su doveli do sasvim određenih problema i stoga su bili izloženi mogućnosti da ih nove spoznaje pobiju.

Glavni problem s kojim se suočavao Brouwerov intucionizam, bio je kako stvarno izvesti rekonstrukciju matematike koju zah-

tijeva njegov program i uvjeriti praktične matematičare da mogu nastaviti raditi bez klasičnog kontinuuma realnih brojeva i bez zakona isključenja trećeg, a da se ne boje opasnosti da će možda izgubiti neke od svojih najvrednijih dragocjenosti. Usprkos tome, intuicionistička matematika koju je Brouwer zaista i razvio patila je od onoga što će Weyl kasnije nazvati "gotovo nepodnošljivom nezgrapnošću. . ." i napravila je jedva vidljive promjene.³¹ Iako se Brouwer nikada nije odrekao svojih uvjerenja, osjećao se sve usamljenijim i posljednje je godine proveo u "potpuno bezrazložnim financijskim brigama i paranoidnom strahu od bankrota, proganjanja i bolesti". Poginuo je 1966, u 85. godini života. Udario ga je auto dok je prelazio cestu ispred svoje kuće.³² Možda je najveća ironija u cijeloj priči to što intucionizam ipak živi, ne kako je to namjeravao Brouwer, u vidu korigirane matematičke prakse, već kao istraživanje sustava formalne logike koji su nastali da bi realizirali neke elemente njegovih ideja.³³ Neki od tih sustava su zaista postali temelj za računalne programe koji izvede formalne zaključke.³⁴

Sve je, naravno, počelo od glavnog problema Hilbertovog programa, problema konzistentnosti aritmetike. Na tom su problemu radili Ackermann i von Neumann i došli su do djelomičnih rezultata, a vjerovalo se da će potpuni rezultat uslijediti nakon što se usavrši tehnika za njegovo rješavanje. Godine 1928. Hilbert je sa svojim studentom Ackermannom objavio maleni udžbenik logike. On se temeljio na Hilbertovim predavanjima (uz Bernaysa kao asistenta) iz 1917. godine. U toj su knjizi postavljena dva problema o temeljnoj logici Fregeovog *Begriffsschrift*a, o onome što se kasnije nazvalo *logika prvoga reda*. Oba su problema već duže vremena bila u zraku, ali Hilbertov uvid da se sustave logike može promatrati iznutraomogućio je da ih se formulira preciznije. Jedan od tih problema je bio dokazati da je logika prvog reda *potpuna*, u tom smislu da bilo koju formulu, za koju znamo da je valjana kad je promatramo izvana, možemo unutar sustava izvesti isključivo po-

moćupravila iznesenih u udžbeniku. Drugi problem, koji je postao poznat kao Hilbertov *Entscheidungsproblem*, omogućio je metodu kojom, ako imamo formulu logike prvog reda, možemo konačnim brojem definiranih i efektivnih koraka odrediti je li ta formula valjana. Kao što ćemo vidjeti u sedmom poglavlju, ova su dva problema, posebno Entscheidungsproblem, kao konkretni problemi koje matematičari trebaju riješiti, donijela u dvadeseto stoljeće toliko nade, o čemu Leibniz u sedamnaestom nije mogao ni sanjati.

Hilbert je, također 1928. godine, održao govor na Međunarodnom kongresu matematičara u Bologni. Osim kad to nije bilo moguće zbog međunarodnih okolnosti, ti su se kongresi redovito održavali svake četiri godine. Naravno, 1916. nije bilo kongresa. Konferencije su se održavale 1920. i 1924, ali je poslijeratna ogorčenost bila tolika da Nijemci nisu bili pozvani. Upravo je Hilbert zahtijevao da njemački matematičari prihvate poziv da prisustvuju kongresu 1928, usprkos protivljenju ljudi poput Bieberbacha (kasnije Nacista) i Brouwera. Oni su htjeli da se sastanak bojkotira i da to bude protest protiv Versailleskog sporazuma. Hilbert je u svom govoru postavio problem formalnog sustava temeljenog na primjeni pravila logike prvoga reda (u biti Fregeovih pravila) na sustav aksioma prirodnih brojeva, koji je danas poznat kao Peanova aritmetika (po talijanskom logičaru Giuseppeu Peanu) ili sustav PA. Hilbert je tražio dokaz *potpunosti* za PA. To znači da za svaki iskaz koji možemo izraziti u sustavu PA, u sustavu PA možemo i dokazati da je istinit, odnosno neistinit. Rješenje koje je za ovaj problem dvije godine kasnije dao mladi logičar Kurt Gödel, uopće nije bilo onakvo kakvo je očekivao Hilbert, dapače pokazalo se razornim za njegov program.

Konačni slom

Hilbertovu ženu Käthe njegovi su biografi opisali kao mudru i razumnju osobu, odanu pomagačicu svoga muža (mnoge njegove radove prepisala je upravo ona), majku i osobu koja je dijelila životnu mudrost mladim matematičarima za koje je dom Hilbertovih uvijek bio otvoren. Hilbert je sebe smatrao svjetskim čovjekom i domišljato je govorio kako je najbolji mogući odmor onaj proveden s koleginom ženom. Nikada se nije umarao od flertova i uvijek je koristio priliku da pleše s lijepim mladim ženama. Njegove su "strasti" bile tako poznate da su se na rođendanskim veseljima pjevali improvizirani stihovi o njegovim "ljubavima" za svako pojedino slovo abecede. Kad je na red došlo slovo "K" svi su se zbunili. U tom trenutku Käthe je primijetila, "Pa mogli ste se barem jednom sjetiti i mene". Na licu mjesta nastali su sljedeći stihovi (u vrlo slobodnom prijevodu):

Gott sei Dank	Hvala budi Bogu
nicht so genau,	Ona se ne želi svađati
nimmt es Käthe	"Koga briga", kaže Käthe
seine Frau.	A ona mu je žena

Sin Franz neprestano je uznemirivao supružnike. Njegova izrazita fizička sličnost s ocem samo je naglašavala kako je ne prati i sličnost u mentalnoj sferi. Iako su se trudili praviti se da nije tako, postalo je jasno da je Franz poremećeni mladić i na koncu ga je bilo nužno smjestiti u instituciju. Otac je na tu tragediju reagirao tvrdnjom da on više nema sina, no majka se osjećala drugačije.

Godine 1929. svoja je vrata otvorilo prekrasno novo zdanje koje je udomilo Göttingenski matematički institut. Sredstva su osigurali Rockefellerova zaklada i njemačka vlada. To je velikim dijelom bio rezultat umješne diplomacije Richarda Couranta. No, dani kad je Göttingen bio svjetski centar matematičkih istraživanja bili su

pri kraju. Godine 1930. Hilbert odlazi u mirovinu a Hermann Weyl prihvaća ponudu da preuzme njegovo mjesto. Te je iste godine Hilbert bio nagrađen dodjelom titule "počasnog građanina" njegova rodnog grada Königsberga. Pozvan da održi govor te je seni u Königsbergu na skupu znanstvenika i liječnika, Hilbert je odabrao prikladno opću temu: Prirodna znanost i logika. U govoru koji je obuhvaćao razna područja, naglasio je presudnu ulogu koju matematikma ima u znanosti a logika u matematici. Uz sebi svojstven optimizam, ustvrdio je da ne postoje nerješivi problemi. Zaključio je riječima:³⁵

Wir müssen wissen	(Moramo znati)
Wir werden wissen	(Znat ćemo)

U Königsbergu se nekoliko dana prije Hilbertova govora, održavao simpozij o temeljima matematike. Predavači su bili Brouwerov student i poznavatelj njegova rada A. Heyting, filozof Rudolph Carnap i John von Neumann. Von Neumann je predstavljao program Hilbertove teorije dokaza. Na diskusiji za okruglim stolom kojom je završio taj događaj, jedan je sramežljivi mladić imenom Kurt Gödel (tema našeg sljedećeg poglavlja) onima koji su shvatili koliko je to važno, najavio novo doba u istraživanjima temelja. Von Neumann je odmah shvatio i zaključio da je to kraj – Hilbertov program ne može uspjeti. Kad je Hilbert doznao za Gödelovu najavu, njegova je prva reakcija bila bijes zbog onoga što je njemu izgledalo kao otvoreni napad na njegovo "Wir werden wissen". No, Bernays je opisao dostignuća Hilbertove teorije dokaza u dva velika sveska koja su se pojavila 1934. i 1939. godine i u njima je Gödelov rad imao važnu ulogu.³⁶

Hilbertov sedamdeseti rođendan 1932. godine slavio se, kako i dolikuje, u novoj zgradi Matematičkog instituta. Bilo je zdravica, glazbe i naravno plesa, a starac je većinu plesova proveo na podiju. Te iste 1932. godine kriza je bila u punom zamahu, a Nacisti

su jako napredovali u izborima za Reichstag. Sljedećeg siječnja Hitler je imenovan kancelarom, a ubrzo je slijedio krah njemačke znanosti. Židovima je bilo zabranjeno podučavati i oni su se iseljavali jedan za drugim. Richard Courant je unatoč tome što je služio u njemačkoj vojsci u Prvom svjetskom ratu, bio izgnan s Matematičkog instituta za koji je toliko puno napravio i završio je na Sveučilištu u New Yorku gdje je na kraju osnovao novi matematički institut. Institut je nazvan po njemu, a bio je smješten u lijepoj zgradi u Greenwich Villageu u New Yorku. Iako je bio "Arijevac" smatrao je da je situacija u Njemačkoj nepodnošljiva i prihvatio je mjesto na novom Institutu za napredna istraživanja u Princetonu, zajedno s Albertom Einsteinom.*

Izgleda da je Hilbert bio zbunjen novom političkom situacijom – s jedne strane, govorio je protiv režima i kad je to postalo veoma opasno, a s druge strane nije shvaćao da hvaljeni njemački pravni sustav ne može zaštititi pojedinca od samovoljnih napada. Na jednom je skupu Hilbert pitao Blumenthala (svog prvog doktoranta) koje kolegije predaje. Kad mu je ovaj rekao više ne smije držati predavanja, starac se razbjesnio ne mogavši shvatiti zašto Blumenthal ne poduzme pravne korake. Blumenthal je uspio otići

*Oba velika znanstvenika kasnih četrdesetih držala su predavanja kojima sam imao sreću prisustvovati kao student. Ta predavanja nisu bila primjeri izvanrednog znanstvenog izlaganja, no to naravno nije bio niti cilj. Okupljali smo se u Fuld Hallu, sjedištu Instituta za napredna istraživanja, željni da čujemo te legendarne ljude.

Hermann Weyl je trebao dati uvod u niz predavanja japanskog matematičara Kodaira. S njegovih se predavanja najbolje sjećam dobrohotnog zadovoljstva s kojim je pričao o matematičkim idejama. Weylova predavanja nisu bila dobro organizirana, dok su Kodairina bila uzor jasnog matematičkog izlaganja.

Einstein je na predavanju otkrio da se skup jednačbi za "jedinstvenu teoriju polja" kojom se bavio, može izvesti iz onoga što je zvao varijacijsko načelo. Dok je pisao po ploči potpuno je izgubio osjećaj za vrijeme i stao je tek nakon upozorenja J. Roberta Oppenheimera, ravnatelja Instituta.

u Nizozemsku, ali kad su u nju upali Nijemci 1940, našao se u klopci. Umro je 1940. u ozloglašenom getu u Theresienstadtu u današnjoj Češkoj Republici.

Hilbert je umro 1943, u jeku Drugog svjetskog rata. Käthe je umrla dvije godine poslije. Na Hilbertovu nadgrobnom spomeniku stoje ove riječi:

Wir müssen wissen

Wir werden wissen

6 Gödel remeti planove

U jesen 1952, nedugo nakon što smo moja žena Virginia i ja stigli u Institut za napredna istraživanja u Princetonu, gdje smo trebali ostati dvije godine, vozili smo se Ulicom Olden prema Institutu, kad su nam se na putu ispriječila dva postarija muškarca koji su polako i bezbrižno hodali ispred našeg automobila. Viši je bio podosta neuredan, no drugi je bio besprijekorno obučen u poslovno odijelo i nosio je aktovku. Dok sam ih pažljivo zaobilazio, razaznali smo da su to bili Albert Einstein i Kurt Gödel. "Einstein i njegov odvjetnik", duhovito je primijetila Virginia.

Dvojica dobrih prijatelja nisu se razlikovala samo po oblačenju. Nakon predsjedničkih izbora 1952. Einstein je izjavio: "Gödel je potpuno poludio. . . Glasao je za Eisenhowera."¹ Liberalnom Einsteinu bilo je nezamislivo da netko može glasati za republikanca. Imali su različite poglede i na temeljna filozofska pitanja. Dok je stvarao specijalnu teoriju relativnosti, na Einsteina je utjecao skeptički pozitivizam kojim je Ernst Mach napao učenje Immanuela Kanta po kojem su naše predodžbe o prostoru i vremenu (iako objektivne) neovisne o iskustvenom zapažanju. Gödel je počeo čitati Kanta još kao dječak i radovi klasičnih njemačkih filozofa (posebno Leibniza) zanimali su ga do kraja života. U neobjavljenim rukopisima, koji su među drugim papirima pronađeni nakon njegove smrti, tvrdio je da je ispravno shvaćena teorija relativnosti zapravo potvrda nekih Kantovih stajališta o prirodi



Kurt Gödel

vremena.² Gödel je obznanio da mu je upravo odbacivanje ideja pozitivizma omogućilo da vidi veze koje su drugi logičari previdjeli i tako dođe do značajnih otkrića. Time je zapravo samo ponovio prigovor Fregea i Cantora ograničenjima pozitivizma.³

Nakon Gödelove smrti 1978. godine u Beču je osnovano Društvo Kurta Gödela. Ono se bavi istraživanjima u logici i njoj srodnim područjima računarstva. Skupovi tog društva obično se održavaju u Beču, ali se u kolovozu 1993. Društvo sastalo u Brnu u Češkoj Republici. Tamo je 87 godina prije rođen Gödel. Skup je imao znanstveni karakter, ali se održala i ceremonija u kojoj su gradske vlasti Brna svečano otvorile komemorativnu ploču na Gödelovoj rodnoj kući. Dobro se sjećam tog događaja. Stajali smo pod kišobranima na hladnoj ranojesenjoj kišici. Nakon neizostavnih govora na češkom, lokalni sastav odjeven u živopisne narodne nošnje, odsvirao je nekoliko glazbenih brojeva.

Kurt Gödel rođen je 1906. godine u Brnu, koje je tada još bilo dio Austro-Ugarskog Carstva. Bertrand Russell je iz nekog razloga vjerovao da je Gödel Židov. Zapravo je majčina obitelj bila protestantska, dok mu je otac nominalno pripadao starokatolicima, ali ni jedno ni drugo nisu redovito išli u crkvu. Kurt se školovao isključivo u njemačkim školama. Bio je vrlo pedantan i nije ništa htio baciti pa danas imamo neuobičajeno potpunu sliku o njegovom osnovnoškolskom obrazovanju. Svjedodžbe pokazuju da je dobivao najbolje ocjene iz svih predmeta, a radne bilježnice su dokaz da je puno vježbao. Kad mu je bilo osam godina, Kurt je dobio reumatičnu groznicu i postao doživotni hipohondar. Njegov stariji brat Rudolf je izjavio da je Kurt još kao dječak pokazivao znakove mentalne nestabilnosti.⁴

Raspadom Austro-Ugarskog Carstva nakon Prvog svjetskog rata, obitelj Gödel postala je dio velike njemačke manjine u novoosnovanoj Čehoslovačkoj. U Beču se govorilo njemački, bio je samo stotinjak kilometara udaljen od Brna i imao je kvalitetno

sveučilište. Ubrzo je privukao Rudolfa i Kurta. Nakon strogog srednjoškolskog obrazovanja u Brnu i s gotovo besprijekornom svjedodžbom, Kurt se u jesen 1924. preselio u Beč. Živio je u stanu s Rudolfom koji se bio doselio nešto prije kao student medicine. Iako je Kurtova prvotna zamisao bila studirati fiziku, ljepota struktura nekih cijelih brojeva koje je otkrio u predavanjima o teoriji brojeva, uvjerila ga je da je matematika njegov pravi poziv.

Austrijska Republika je nastala na ruševinama Austro-Ugarskog Carstva krajem Prvog svjetskog rata. Trajala je svega dvadeset godina, a onda je 1938. pripojena nacističkoj Njemačkoj. To su bile godine žestokih nereda i nacija je često bila na rubu građanskog rata između bečkih "crvenih", odnosno socijaldemokrata i duboko konzervativne unutrašnjosti. U tako burnom okruženju cvao je poznati Bečki krug. U radu Whiteheada i Russella razrađen je umjetni jezik matematike u kojem se dokazi teorema mogu potpuno prikazati jedino simboličkim formalnim operacijama. Krug je 1924. godine osnovala grupa filozofa i znanstvenika koji su nastavljali empirističko pozitivističku tradiciju Macha i Helmholtza. Kao što smo spomenuli u četvrtom poglavlju, Cantor i Frege su žestoko napadali upravo te ideje. U Krugu su prezirali tradicionalnu metafiziku i vjerovali su da je važan cilj filozofije razvitak i istraživanje simboličkih sustava poput Whitehead–Russellovog, koji bi obuhvatio ne samo matematiku već i empirijske znanosti. Osnivača, Moritza Schlicka, 1936. godine ubio je mentalno poremećeni bivši student, što su nacisti pripisali njegovim navodno ljevičarskim stajalištima. Krugu su pripadali mnogi važni ljudi, kao što su Rudolf Carnap, koji je studirao s Fregeom i Hans Hahn koji je kasnije bio Gödelov najvažniji učitelj.*

*Carnap je doktorirao na Sveučilištu u Jeni, gdje je bio Fregeov student. Bio je vodeća ličnost filozofske struje zvane logički pozitivizam. Od 1935. je radio na američkim sveučilištima, prvo na Sveučilištu u Chicagu, a onda na U.C.L.A.

Hans Hahn je bio mentor Gödelove disertacije, značajno je doprinio razli-

Povratak Kroneckerovog duha

Bertrand Russell je ideje o temeljima matematike konkretizirao u golemoj knjizi od tri sveska *Principia Mathematica*, a njegov sjajni, donkihotski student Ludwig Wittgenstein svoje je ideje predstavio svijetu u tankom *Tractatus Logico-Philosophicusu* na svega 75 stranica. Na sastancima Bečkog kruga stalno se polemiziralo o idejama ove dvojice filozofa. Gödel je te sastanke počeo posjećivati 1926. godine na poziv svog učitelja Hansa Hahna i nije se slagao s mnogim stvarima koje je tamo čuo. Usprkos tome, čaroban spoj Russellovog dokaza da formalni logički sustav može obuhvatiti čitavu matematiku i Wittgensteinova naglašavanja problema jezika unutar jezika, svakako su utjecali na smjer istraživanja mladog Gödela. U tim Wittgensteinovim preokupacijama odzvanjao je Hilbertov stav da formalni logički sustavi mogu predstavljati samo matematičko zaključivanje iznutra, ali da ih se pomoću matematičkih metoda može promatrati i izvana.

U predavanjima iz logike koja je držao u Göttingenu Gödel prihvaća temeljna pravila logičke dedukcije koja je postavio Frege u svom *Begriffsschriftu*, a koja su konkretizirali Russell i Whitehead u *Principia Mathematica*. U priručniku iz logike iz 1928. (koji su napisali Gödel i njegov student Wilhelm Ackermann), Hilbert je postavio pitanje postoje li praznine u tim pravilima, odnosno deduktivni zaključci koji bi trebali biti ispravni, ali za koje postojeća pravila nisu dovoljna da bi se iz premisa dobila konkluzija. Vjerovao je da nema takvih praznina, ali je htio dokaz da je tomu tako, odnosno da su pravila zaista potpuna. Upravo je taj problem Gödel izabrao za svoju disertaciju. Iako je on odmah uspio dobiti rezultat koji je tražio Hilbert, cijela ta situacija bila je pomalo ironična. Tehnike koje je koristio Gödel bile su uglavnom poznate ondašnjim logičarima, no kao što ćemo vidjeti, ruke su im bile

čitim granama matematike, a zanimala ga je i filozofska problematika.

vezane kako utjecajem Brouwer–Weylovih ograničenja tako i time što ih je Hilbert prešutno prihvaćao kao ispravne u metamatematičkim istraživanjima.

Logička dedukcija kreće od premisa prema konkluziji. Kad se služimo Frege–Russell–Hilbertovom simboličkom logikom, svaka premisa kao i konkluzija prikazani su logičkom formulom, što se svodi na niz simbola.⁵ Neki od tih simbola označuju logičke pojmove, neki su znakovi interpunkcije, a neki su jednostavno karakteristični za dotično područje. Evo primjera logičkog zaključka u kojem su prva dva reda premise, a treći je konkluzija.

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Svatko tko voli je sretan.} \\ \text{John voli Mary.} \end{array}}{\text{John je sretan.}}$$

Koristeći logički simbolizam koji smo uveli u trećem poglavlju, možemo ovo prevesti u jezik logike na sljedeći način:

$$(\forall x)((\exists y)(V(x, y) \supset S(x)) \quad (*)$$

$$\frac{V(J, M)}{S(J)}$$

U ovom zaključku koristimo logičke simbole $\supset$, $\forall$, i $\exists$, čijih značenja ćemo se prisjetiti u sljedećoj tablici:

$\supset$	ako... , onda...
$\forall$	svaki
$\exists$	neki

Slova x , y služe kao *variable* koje (poput zamjenica) zamjenjuju proizvoljne jedinice zadane populacije. Drugi simboli V , S , J i M imaju značenja koja su za dotično područje važna na sljedeći način:

V = relacija voljenja

S = svojstvo bivanja sretnim

J = John

M = Mary

Dakle, taj zaključak možemo čitati na sljedeći način:

Za svako x , ako postoji neko y takvo da ako x voli y ,
onda je x sretan.

John voli Mary.

John je sretan

Kad kažemo *ovaj zaključak je valjan*, to znači sljedeće: bez obzira na to koje predmete izaberemo, bez obzira na veze među tim predmetima koje predstavljamo slovom V , bez obzira na obilježja tih predmeta koja predstavljamo slovom S i bez obzira koje predmete izaberemo označiti slovima J i M , dok god su te dvije premise istinite, istinita će biti i njihova konkluzija. Da bismo pojasnili što znači da je zaključak *valjan*, pomoći će nam jedna druga interpretacija simbolički istog zaključka, ali različitoga sadržaja:

Grabežljivci su brzi.

Jastrebovi su grabežljivci miševa.

Jastrebovi su brzi.

Da bismo jasnije vidjeli da i ovaj primjer spada pod simbolički zaključak $(*)$, možemo uzeti da varijable x , y označuju proizvoljne vrste sisavaca, a ostala slova interpretirati na sljedeći način:

V = relacija grabežljivca i plijena

S = svojstvo brzine

J = jastrebovi

M = miševi

Dakle, ovaj simbolički zaključak možemo čitati:

Za svako x , ako postoji y takav da je x grabežljivac y -a,
onda je x brz.

Jastrebovi su grabežljivci miševa.

Jastrebovi su brzi.

Hilbert je tražio dokaz da za svaki valjani zaključak kakav smo upravo opisali, za konkluziju izvedenu iz premisa pomoću Frege–Russell–Hilbertovih pravila, postoji dokaz koji se provodi korak po korak. Drugim riječima, Hilbert je tražio dokaz da ako predloženi zaključak ima svojstvo da

*za svaku moguću interpretaciju slova iz formula, uz istinite premise,
konkluzija također bude istinita,*

onda možemo koristiti Frege–Russell–Hilbertova pravila da bismo od premisa došli do konkluzije. U svojoj doktorskoj disertaciji Gödel je uspio dati ono što je Hilbert tražio.

Gödel je svoj dokaz objasnio direktno i jasno, a takve su bile i njegove naredne publikacije. Iako su Gödelovi radovi predstavljali golemo dostignuće čija je golema važnost postala jasnija tek s vremenom, u njegovim metodama nije bilo puno novina. One su bile poznate ondašnjim logičarima. Zato se možemo s pravom upitati kako to da se moćni tim Hilberta, Ackermana i Bernaysa nije uspio probiti do dokaza. Sâm Gödel je nakon nekoliko godina objasnio da je taj teorem bio "gotovo trivijalna posljedica" rezultata rada norveškog logičara Thoralf Skolema, koji se pojavio 1923, šest godina prije Gödelove disertacije (iako vjerojatno ni Gödel ni njegov mentor nisu bili upoznati s njim). U jednom pismu iz 1967. Gödel se osvrće na dvadesete godine i kaže da je "sljepoća . . . logičara uistinu iznenađujuća". Ali, dodao je:

Mislim da to nije teško objasniti. Naime, u to vrijeme nije postojao nužni epistemološki pristup metamatematici i zaključivanju o beskonačnom.⁶

Zbog Brouwer–Weylovih kritika razmišljanja o beskonačnom (o kojoj smo raspravljali u prošlom poglavlju) i Hilbertove definicije metamatematike koja dopušta samo zaključivanje o konačnom, prihvaćalo se, barem prešutno, da istraživanje formalnih logičkih sustava izvana mora biti ograničeno na konačne metode protiv kojih se Brouwer nije mogao buniti.⁷ Ali, Gödelov teorem o potpunosti ne može se dokazati samo konačnim metodama. Gödel je ovako objasnio zašto su beskonačne metode prikladne u ovom slučaju, pritom se suprotstavljajući ciljevima Hilbertovog programa i njegovim metodološkim ograničenjima:

... uzrok razmatranog problema nije bio spor oko temelja matematike (kao što je to bio slučaj, na primjer, s problemom konzistentnosti matematike); i da nikada nije bilo sumnje da je "naivna" matematika ispravna u pogledu njezina sadržaja, taj se problem mogao smisljeno postaviti i unutar takve naivne matematike (za razliku od recimo problema konzistentnosti) i *to je razlog zbog kojeg ograničavanje dokaznih sredstava, čini se, nije ništa nužnije za ovaj problem nego za bilo koji drugi matematički problem.*⁸ [kurziv dodan]

Gödel je, dakle, prihvatio Hilbertova ograničenja pri upotrebi konačnih metoda u istraživanjima koja su se bavila osiguravanjem temelja matematike, ali nije vidio razloga da prihvati ista ograničenja u matematičkoj logici.

Neodlučivi iskazi

Drugi problem s poznatog Hilbertovog popisa iz 1900. godine tražio je dokaz konzistentnosti aritmetike realnih brojeva. Tada nitko nije imao pojma kakav bi mogao biti taj dokaz, a posebno kako

izbjeci zamku cirkularnosti, to jest izbjeći da se u dokazu upotrijebe iste one metode koje tek treba dokazati. Kao što smo vidjeli u prošlom poglavlju, Hilbert je predstavio svoj program metamatematike. Da bismo dokazali konzistentnost aksioma oni trebaju biti obuhvaćeni sustavom formalne logike u kojem je dokaz samo konačan broj simbola koji su raspoređeni na određeni način. Stoga je dokaz da iz ovog sustava ne možemo izvesti nijedno proturječenje izvediv uz pomoć onoga što Hilbert naziva konačnim metodama, a one su još ograničenije od onoga što bi dopustio Brouwer. Gödel se počeo baviti tim problemima nakon što je završio doktorsku disertaciju. Tada je izgledalo da će Hilbertov program uspjeti.

Na Međunarodnom kongresu u Bologni 1928. Hilbert je govorio o sustavu koji obuhvaća temeljnu teoriju prirodnih brojeva 1, 2, 3, ... – danas taj sustav zovemo Peanova aritmetika (PA). U vrijeme kad je Gödel počeo razmišljati o Hilbertovu programu, Hilbertov student Ackermann i John von Neumann sve su se više približavali dokazu konačne konzistentnosti za PA. Obojica su našla dokaze za ograničeni podsustav PA-a i smatralo se da samo tehničke poteškoće, koje će uskoro biti prevladane, priječe daljnji napredak. I sam Gödel je vjerojatno smatrao da je tomu tako. Bilo kako bilo, on je htio dokazati konzistentnost moćnijih sustava *u odnosu* na PA. Već je postojalo puno dokaza relativne konzistentnosti pa je ova Gödelova ideja bila prirodna. On se nadao da će konzistentnost moćnih sustava, koji su prikladni za aritmetiku realnih brojeva, konačnim metodama moći svesti na konzistentnost sustava PA. To je zapravo bio nastavak Hilbertova puta: Hilbert je sveo konzistentnost euklidske geometrije na konzistentnost aritmetike realnih brojeva, a Gödel pokušao napraviti sljedeći korak u redukciji. Da je Gödel uspio, dokaz konzistentnosti sustava PA koji su dali Hilbertovi nasljednici automatski bi bio osigurao i dokaz konzistentnosti aritmetike realnih brojeva, čime bi Hilbertov drugi problem bio riješen. No, nije bilo suđeno da tako doista i

bude. Ne samo da Gödel nije uspio u svom pokušaju, već je dokazao da nije ni mogao uspjeti! Na koncu, umjesto da je pomogao zaštititi matematiku od Brouwer–Weylove kritike čemu se očito nadao, on je zapravo pokopao Hilbertov program.

Dok se bavio tim problemima, ponovno razmislio o tome što znači promatrati formalni logički sustav izvana, a što iznutra. Russell i Whitehead su prilično uvjerljivo pokazali da je svu uobičajenu matematiku moguće razviti unutar takvog sustava. Hilbert je u svojoj metamatematici predlagao korištenje matematičkih metoda (naravno znatno ograničenih) za proučavanje takvih sustava izvana. Zašto se onda i sama metamatematika ne može razviti unutar formalnog logičkog sustava? Promatrani izvana, takvi sustavi sadrže veze među nizovima simbola. Iznutra, oni mogu izraziti tvrdnje o različitim matematičkim predmetima uključujući i prirodne brojeve. Štoviše, nije se teško dosjetiti načina na koje se nizovi simbola mogu *kodirati* prirodnim brojevima. Aha! *Pomoću takvih kodova ono vanjsko se može smjestiti unutra.* Da bismo pokazali kako se koriste takvi kodovi, pogledajmo još jedanput kako smo simbolički napisali premisu “svatko tko voli je sretan”:

$$(\forall x)((\exists y)(V(x, y) \supset S(x)) \quad (\dagger)$$

Ovdje imamo niz od deset simbola poredanih na određeni način:

$$, \quad V \quad S \quad \supset \quad \forall \quad \exists \quad x \quad y \quad (\quad)$$

Tu možemo koristiti jednostavan sustav kodiranja u kojem svaki simbol zamjenjujemo jednom od decimalnih znamenki, primjerice na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccccccccc} , & V & S & \supset & \forall & \exists & x & y & (&) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Ako simbole iz (+) zamijenimo znamenkama, dobivamo kodni broj

846988579186079328699.

Treba primijetiti da je jednako lako doći od niza simbola prema broju koji je njegov kôd, kao i ići u suprotnom smjeru. Naravno da kad imamo više od deset simbola moramo koristiti drugačije kodiranje, no to ne predstavlja poteškoću. Ako, na primjer, svaki simbol kodiramo parom decimalnih znamenki, možemo pokriti do stotinu simbola. Vrlo slične metode možemo primijeniti na bilo koji formalni logički sustav i to tako da se različiti izrazi takvih sustava (od kojih izvana sve možemo prikazati kao niz simbola) mogu kodirati pomoću prirodnih brojeva.⁹

Gödel je jasno vidio kako možemo koristiti kodove za razvoj metamatematike formalnih sustava logike unutar samih tih sustava. Dok je o tome razmišljao, uvidio je da misli one misli koje su uputama Bečkog kruga bile strogo zabranjene. Shvatio je da postoje iskazi koji se, promatrani unutar takvih sustava mogu smatrati istinitima, ali se unutar njih ne mogu dokazati. Za mnoge pripadnike Bečkog kruga, bilo kakav pojam matematičke istine drukčiji od dokazivosti bila je besmislica, himera idealističke metafizike. Neopterećen takvim uvjerenjima, Gödel je došao do sjajnog zaključka da je zapravo upravo suprotno; ne samo da smislen pojam matematičke istine postoji, nego njegov opseg nadilazi ono što se može dokazati u bilo kojem formalnom sustavu. Taj se zaključak odnosi na širok spektar formalnih logičkih sustava, od razmjerno slabih kakav je PA do sustava kakav je PM iz Whitehead–Russellove knjige *Principia Mathematica*, koji u sebi sadrži svu moć klasične matematike. U svakom od tih sustava postoje istiniti iskazi koji se u tom sustavu mogu izraziti, ali se u njemu ne mogu dokazati. Gödel je odlučio pokazati svoje rezultate za PM u sjajnom radu *O formalno neodlučivim stavcima Principia Mathematica i srodnih sus-*

tava (1931), čime je pokazao da nema nade da će i snažni logički sustavi moći u cijelosti obuhvatiti matematičku istinu.¹⁰

Ključni korak Gödelova dokaza bio je pokazati da je *svojstvo prirodnog broja da je on kôd iskaza dokazivog* u PM, i *samo moguće izraziti* u PM. Koristeći tu činjenicu, mogao je napraviti takve iskaze u sustavu PM da svatko tko zna koji kod je upotrebljen, može potvrditi da neki iskaz nije moguće dokazati u sustavu PM. To znači da on može iznijeti iskaz *A* koji, kad ga se dekodira, potvrđuje da neki iskaz *B* nije moguće dokazati u sustavu PM. Nadalje, netko tko nije upoznat s kodom bi, promatrajući *A*, vidio niz simbola koji izražavaju neki zamršen i tajnovit iskaz o prirodnim brojevima. Ako upotrijebimo kôd, tajna nestaje: *A* izražava iskaz da neki niz simbola *B* predstavlja iskaz koji nije moguće dokazati u sustavu PM. Obično su *A* i *B* različiti iskazi. Gödel je pitao: a što ako su isti? Da je to moguće, pokazao je pomoću matematičkog trika koji je naučio od Georga Cantora: *dijagonalne metode*. Uz pomoć tog trika, vidimo da su iskaz za koji je potvrđeno da nije dokaziv i iskaz koji to potvrđuje, zapravo jedan te isti. Drugim riječima, Gödel je shvatio kako formulirati jedan izvanredan iskaz koji ćemo nazvati *U*. On ima sljedeća svojstva:

- *U* kaže da određeni iskaz nije moguće dokazati u PM.
- Taj iskaz je upravo sâm *U*.
- Dakle, *U* kaže: "*U* nije moguće dokazati u PM."

U Bečkom krugu smatralo se da je jedini pojam "istine" koji ima smisla za iskaze izražene u sustavu poput PM-a pojam dokazivosti prema pravilima sustava. Svojstva ovog iskaza *U* čine to uvjerenje neodrživim. Ako smo voljni prihvatiti da PM ne laže i da je sve što je dokazano u sustavu PM zapravo istina¹¹ onda možemo vidjeti da je iskaz *U* istinit, ali nedokaziv u sustavu PM:

1. *Iskaz U je istinit.* Pretpostavimo da je neistinit. Ono što tvrdi U je onda neistina. Dakle, U ne bi smio biti nedokaziv i morao bi biti dokaziv i stoga istinit. To proturječi pretpostavci da je iskaz U neistinit. Dakle, U mora biti istinit.
2. *Iskaz U nije dokaziv u sustavu PM.* Budući da je istinit, ono što tvrdi mora biti istinito i stoga to nije dokazivo u PM.
3. *Negacija iskaza U , koju pišemo $\neg U$, nije dokaziva u sustavu PM.* Kako je iskaz U istinit, iskaz $\neg U$ mora biti neistinit i stoga također nedokaziv u sustavu PM.

Kako bi se istaknulo da iskaz U ima svojstvo da ni on ni njegova negacija nisu dokazivi u sustavu PM, takav iskaz naziva se *neodlučivim*. No, moramo ponovo naglasiti da se ta neodlučivost tiče samo dokazivosti *unutar* sustava. Promatrano *izvan* sustava, jasno je da je U istinit.¹²

Time dolazimo do jedne zagonetke. Znamo da je iskaz U istinit, iako je nedokaziv u suatavu PM. Sustav PM obuhvaća čitavu uobičajenu matematiku. Ako je tako, zašto onda *unutar* PM-a nije moguće izvesti dokaz da je U istinit? Gödel je shvatio da je to zamalo moguće izvesti, ali da postoji jedan štos. Unutar sustava PM može se dokazati sljedeći iskaz:

Ako je PM konzistentan, onda U .

Dakle, samo dodatna pretpostavka da je PM konzistentan priječi dokaz za U unutar PM-a. Budući da znamo da U ne možemo dokazati unutar PM-a, moramo zaključiti da se konzistentnost za PM ne može dokazati unutar sustava PM. Pod pritiskom Hilbertovog programa, ipak je dokazano da su sustavi poput PM-a konzistentni i to pomoću konačnih metoda za koje se smatralo da čine vrlo skroman podskup onih metoda koje su nam na raspolaganju u sustavu PM. Gödel je dokazao da čak ni sva raspoloživa

sredstva sustava PM nisu dovoljna da bi se dokazala konzistentnost samog sustava PM. Dakle, barem onakav kakav je izvorno zamišljen, Hilbertov program je mrtav!¹³

Kurt Gödel, programer

Realizacija same fizičke naprave koja bi služila kao općenamjensko računalo koje procesira informacije i može se programirati, 1930. godine bila je još desetljećima daleko. No, netko tko danas poznaje moderne programske jezike u Gödelovim radovima o neodlučivosti napisanim te godine, vidio bi slijed od četrdeset i pet numeriranih formula vrlo sličnih računalnom programu. Ta sličnost nije slučajna. Dok je dokazivao da se svojstvo biti kôd dokaza u sustavu PM može izraziti *unutar* sustava PM, Gödel se bavio mnogim problemima kojima će se kasnije susretati pisci programskih jezika i drugi računalni programeri. Na osnovnoj razini, moderna računala mogu izvoditi samo jednostavne operacije s kratkim nizovima nula i jedinica. Stvaraoci takozvanih viših programskih jezika imaju zadatak ponuditi programerima izraze koji obuhvaćaju vrlo složene operacije s kojima oni žele raditi. Da bi računalo moglo izvesti program koji sadrži te izraze, oni se moraju prevesti u strojni jezik, odnosno u detaljan ispis osnovnih operacija potreban da bi ih se program izvršio. Taj posao rade posebni programi za prevođenje, koje nazivamo *interpretori*, odnosno *kompilatori*.*

Osnova Gödelovog dokaza o postojanju neodlučivih iskaza je činjenica da se dokazivost u PM može izraziti u samom sustavu

Interpretor prevodi korake programa jedan po jedan u jezik stroja. On prvo izvrši jedan korak, a onda prelazi na sljedeći. Kompilator prevodi čitav program u jezik stroja. Program strojnog jezika koji je nastao ovim drugim načinom prevođenja može raditi samostalno, bez daljnje pomoći kompilatora. Gotovo sav komercijalni softver proizveli su kompilatori.

PM. Gödel je dobro znao da će svoje revolucionarne rezultate predstaviti veoma skeptičnoj publici i htio je ukloniti svaku sumnju. Stoga se suočio sa sljedećim problemom: kako složene operacije s kodovima nizova simbola, koji odgovaraju aksiomima i pravilima zaključivanja za PM promatranima izvan sustava, rastaviti na jednostavnije i preoblikovati ih u izraze napisane u simboličkom jeziku sustava PM. Da bi riješio taj problem, stvorio je poseban jezik u kojem se korak po korak mogu razviti potrebne operacije.¹⁴ Svaki korak sastojao se od definicije operacije s brojevima koja, posredstvom koda kojeg je Gödel upotrebljavao, odgovara paralelnoj operaciji s izrazima sustava PM. Definicije su bile izražene u Gödelovu posebnom jeziku, i to pomoću izraza koji su već definirani u prethodnim koracima. Taj poseban jezik bio je osmišljen tako da se operacije uvedene takvom definicijom garantirano mogu izraziti unutar sustava PM.

Izvjesno je da je već Leibniz predložio stvaranje preciznog umjetnog jezika u kojem bi velik dio ljudskog mišljenja bio sveden na računanje. Frege je u *Begriffsschriftu* zaista i pokazao kako se može obuhvatiti uobičajeno logičko razmišljanje matematičara. Whitehead i Russell su uspjeli pretvoriti zbiljsku matematiku u umjetni jezik logike. Hilbert je predložio metamatematičko proučavanje takvih jezika. No, tek je Gödel pokazao kako se te matematičke pojmove može ugraditi u same jezike.¹⁵

Osim što je stvorio neodlučivi iskaz U , Gödel je htio pokazati da za formuliranje tog iskaza nisu potrebni neobični matematički pojmovi. U tu mu je svrhu poslužio teorem iz elementarne teorije brojeva poznat kao kineski teorem ostatka, koji bi pokazao da se sve operacije koje je moguće izraziti u njegovu posebnom jeziku isto tako mogu izraziti u temeljnom jeziku aritmetike prirodnih brojeva.¹⁶ Iz toga slijedi da se i sam neodlučiv iskaz U može izraziti u tom temeljnom jeziku. To je zapravo značilo da U možemo napisati rječnikom koji dopušta samo varijable čije su vrijednosti bilo

koji prirodni broj, aritmetičke operacije $+$ i $\times$, simbol $=$ i osnovne operacije Fregeove logike koje danas pišemo kao $\neg, \supset, \wedge, \vee, \exists$ i $\forall$. Izvanredan zaključak je bio da se, čak i s tako malenim rječnikom mogu stvarati iskazi koji su neodlučivi u sustavu PM.

Konferencija u Königsbergu

Dvadesetčetverogodišnji Kurt Gödel 26. kolovoza 1930. u Reichsrat Cafeu u Beču pričao je Rudolphu Carnapu o Konferenciji o epistemologiji egzaktnih znanosti, koja se trebala održati u Königsbergu za deset dana. Carnap, gotovo četrdesetgodišnjak, vodeća ličnost Bečkog kruga, trebao je održati glavno predavanje o logiciističkom programu za temelje matematike, koji je svoju punu realizaciju doživio u *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella. Carnapove bilješke otkrivaju da mu je Gödel govorio o svom senzacionalnom otkriću o tome da postoje iskazi o prirodnim brojevima koji su neodlučivi u sustavu *Principia Mathematica*. Ta su dva logičara (skupa s drugim sudionicima Konferencije) zajedno putovala u Königsberg. Prvog dana Konferencije na rasporedu su bila tri predavanja o temeljima matematike od po sat vremena. Carnap je počeo govorom o logicizmu i nije spomenuo Gödelove nove rezultate. Nakon Carnapa slijedio je A. Heyting, student L. E. J. Brouwera koji je govorio o Brouwerovu intuicionizmu. Posljednje predavanje dana bilo je ono Johna von Neumanna, a tema je bio Hilbertov program.¹⁷

Drugog dana uz još tri predavanja koja su trajala po više od sat vremena, na rasporedu su bile i tri prezentacije od dvadeset minuta, uključujući i onu Gödelovu o njegovoj doktorskoj disertaciji odnosno o potpunosti Fregeovih pravila. Gödelova je senzacija došla trećeg dana, za vrijeme diskusije za okruglim stolom o temeljima matematike. Počeo je prilično dugom probnom diskusijom o tome što bi sustavi poput PM-a dobili od dokaza o konzistent-

nosti. Tvrdio je da je usprkos tome što za takav sustav znamo da je konzistentan, moguće u tom sustavu dokazati iskaz o prirodnim brojevima koji promatran iznutra može biti neistinit. Dakle, puka konzistentnost formalnog sustava ne jamči da je ono što je u tom sustavu dokazano ujedno i točno. Gödela je pozitivan komentar von Neumanna očito ohrabrio da nastavi. Tvrdio je da ako pretpostavimo da su sustavi poput PM-a konzistentni "možemo čak dati i primjere iskaza" u uobičajenom aritmetičkom obliku koji jesu istiniti, ali nisu dokazivi u takvom sustavu. "Stoga", nastavio je, ako sustavu PM "dodamo negaciju tih iskaza", dobit ćemo konzistentan sustav u kojem možemo dokazati neistinit iskaz.¹⁸

John von Neumann je očito odmah shvatio važnost onoga što je napravio Gödel i tražio je da ga se ne uključi u diskusiju na kraju sastanka. Nema potvrde o tome da je bilo tko drugi shvatio što se dogodilo. Von Neumann je nastavio razmišljati o toj problematici i shvatio je da (zbog gore objašnjenih razloga) iz Gödelovih rezultata slijedi da je sama konzistentnost nedokaziva pa je zaključio da je to kraj Hilbertovog programa. Kad je stiglo von Neumannovo pismo koje je sadržavalo tu informaciju, Gödel je već dao objaviti svoj rad s istim zaključkom. Von Neumann je poslao pismo u kojem se zahvalio Gödelu što je već tiskao rad i možda pomalo žalosno dodao: "Budući ste vi utvrdili nedokazivost konzistentnosti kao prirodan nastavak i produbljivanje vaših ranijih rezultata, ja naravno neću objavljivati na tu temu".¹⁹ Logika i temelji matematike bili su jedan od važnih von Neumannovih interesa. Postao je dobar Gödelov prijatelj, puno je predavao o njegovu radu i govorio je o njemu kao o najvećem logičaru nakon Aristotela.²⁰ No, on sâm se prestao baviti logikom. Više od desetljeća kasnije vratio mu se interes za logiku, ali za logiku utjelovljenu u hardveru: svenamjenskom digitalnom računalu.

Jedan von Neumannov suradnik u svojim je kasnijim radovima ispričao zabavnu priču o tome kako je von Neumann opisivao

svoje pokušaje da dokaže konzistentnost u aritmetici:

Na kraju radnog dana [von Neumann] bi otišao u krevet i često bi ga noću budile nove spoznaje. . . . Ovaj put bio je zaokupljen pokušajem da dođe do dokaza [o konzistentnosti aritmetike] i nije uspio! Jedne noći sanjao je kako nadići tu poteškoću i u snu je uznapredovao u dokazu. . . . Sljedećeg je jutro ponovno bezuspješno pokušavao, a te se noći vratio u krevet i usnuo je san. Vidio je izlaz iz poteškoće, ali kad je ustao . . . shvatio je da problem još uvijek postoji.

Sve bi ispalo drugačije, šalio se von Neumann, da sam sanjao i te treće noći!²¹

Konferencija na kojoj je Gödel izbacio svoju bombu bila je samo dodatak glavnom događaju koji se tog tjedna odvijao u Königsbergu, a to je bio sastanak Društva njemačkih znanstvenika i liječnika. Početno predavanje imao je David Hilbert, dan nakon okruglog stola. Tom je prigodom Hilbert izrekao slogan koji još stoji na njegovoj nadgrobnoj ploči, a u kojem je izrazio vjeru da na sva matematička pitanja moramo naći odgovore i da ćemo ih sigurno i naći: *wir müssen wissen, wir werden wissen* [moramo znati, znat ćemo]. Gödelov teorem nepotpunosti pokazuje da ako matematiku ograničimo na ono što je moguće obuhvatiti posebnim formalnim sustavom poput PM-a, Hilbertova je vjera uzaludna. U svakom formalizmu uvijek će biti matematičkih pitanja koja nadilaze. S druge strane, svako takvo pitanje u načelu vodi ka snažnijem sustavu koji omogućuje rješenje tog problema. Možemo zamisliti hijerarhiju sve jačih i jačih sustava, koji omogućuju da odlučimo ono što je u slabijim sustavima neodlučivo. Iako je sve to nepobitno u teoriji, pitanje je u kojoj mjeri će to ikada postati stvar matematičke prakse. Gödel je ostavio matematičarima u nasljeđe zadatak da nauče upotrebljavati te jače sustave pri rješavanju tvrdokornih problema. Iako su neki hrabri istraživači radili u tom

smjeru, većina ih ništa ne zna o tim problemima, a neki stručnjaci prema njima su vrlo skeptični.²²

Ljubav i mržnja

Gödelova kolegica iz studentskih dana, Olga Taussky-Todd, koja je kasnije postala istaknuta teoretičarka brojeva, izvijestila nas je o tome da su studenti dobro prepoznavali Gödelove sposobnosti i kad je neki student imao poteškoće, Gödel je uvijek bio voljan pomoći. Ispričala je sljedeću zabavnu anegdotu:

Nema sumnje da je Gödel volio pripadnice suprotnog spola i on to nije tajio. . . . Radila sam u jednoj maloj sobici na Fakultetu, izvan knjižnice Odsjeka za matematiku. Vrata su se otvorila i ušla je malena, vrlo mlada djevojka. Bila je zgodna . . . i nosila je lijepu i neobičnu ljetnu haljinu. Ubrzo je ušao Kurt. Ona je ustala i zajedno su izašli. Vidjelo se da se Kurt pravi važan pred njom.²³

Gödel je svoju buduću životnu suputnicu Adelu sreo dok je studirao, deset godina prije nego su se vjenčali. Ona je tada bila udana za svog prvog muža i radila je kao plesačica.* Njezini roditelji vjerojatno nisu bili zadovoljni kćerinim izborom – ne samo što je bila šest godina starija od Kurta, nego je bila i rimokatolkinja. Plesačice u Beču, s pravom ili ne, bio je glas da se od njih za malo novca mogu dobiti seksualne usluge.²⁴ Možda je zato Kurt bio prilično oprezan u pogledu svoje veze s Adelom, čini se prisne i intimne već neko vrijeme prije vjenčanja. Samo vjenčanje iznenadilo je Gödelove kolege.²⁵ Rudolf (koji je ostao neženja) ubrzo nakon bratove smrti napisao je: "Ne bih htio osuđivati brak svoga brata."²⁶ Bračna sreća i dalje je velika tajna, i prognoze starijih i

*Prema jednom izvoru plesala je u noćnom klubu *Der Nachfalter* ("noćni leptir") čije ime podsjeća na mračna noćna bića. Prema drugoj verziji bila je balerina.

valjda mudrijih često griješe. Tako je bilo i s brakom Gödelovih, koji je bio dug i sretan.

Gödelovi pokušaji da ostvari profesionalnu karijeru u Austriji odvijali su se u okružju nemirnih i kobnih političkih, socijalnih i ekonomskih događaja. Državi njemačkog govornog područja, koja je nastala od krhotina Austro-Ugarskog Carstva krajem Prvog svjetskog rata, saveznici su branili ono što je željela većina Austrijanaca: ujedinjenje s Njemačkom.

Bilo kako bilo, nezavisna demokratska Austrija nije potrajala. Građanski rat između fašističkog *Heimwehra* i socijaldemokratskog *Schutzbunda* doživio je svoj vrhunac 1927, kad su jednog starca i dijete ubili reakcionari, a da za to nisu bili osuđeni. U masovnim prosvjedima predvođenim socijaldemokratima do temelja je spaljena zgrada Ministarstva pravosuđa a poginulo je gotovo stotinu ljudi. Krajem 1929. predsjednik Republike dobiva moć da vlada dekretom. U međuvremenu je velika ekonomska kriza učinila neke druge mjere nevažnima. Dollfussov režim, izabran 1932, bio je autoritaran pa Parlament nije više imao značajnu ulogu. Stvari su se kretale od jako lošega ka nemjerljivo gore. Početkom 1934. Hitler je već bio na vlasti u Njemačkoj i ukinute su sve stranke osim Dollfussove Fatherland Front. Nekoliko mjeseci kasnije, Dollfussa su ubili austrijski nacisti u neuspješnom pokušaju da osvoje vlast. Njegov nasljednik Schuschnigg je uz Mussolinijevu pomoć odbijao Hitlera nekoliko godina. No, kraj je došao u ožujku 1938. kad je nacistička Njemačka pripojila Austriju.

Dugu akademsku karijeru Gödel je započeo u veljači 1933. godine kao *Privatdozent*. U međuvremenu je bio aktivan na seminaru logike koji je vodio njegov mentor Hahn i na stalnom kolokviju koji je vodio matematičar Karl Menger (koji je sudjelovao u radu Bečkog kruga). Značajan dio zanimljivih Gödelovih rezultata iz tog vremena, od kojih su neki prilično važni, objavljivani su kao sažeti članci u izvještajima s Mengerovih kolokvija.²⁷ Svoj prvi

semestar kao *Privatdozent* Gödel je održao 1933. godine u teškim uvjetima. Jedanput je Sveučilište cijeli jedan dan bilo zatvoreno zbog nacističkih aktivnosti, a u raznim dijelovima Beča punih tjedan dana eksplodirale su nacističke bombe.

Kad je stigla ponuda da akademsku godinu 1933/34. provede u Institutu za napredna istraživanja u Princetonu, Gödel ju je teško mogao odbiti. Ne samo da bi time izbjegao političko ludilo kod kuće, već se mogao veseliti radu s takvim zvijezdama kao što su Albert Einstein i John von Neumann. Ipak, mogućnost da ostavi obitelj i prijatelje (možda posebno Adelu) veći dio godine, svakako je u sramežljivom i hipohondričnom mladiću izazvala priličnu tjeskobu. Kad je trebalo otići na brod koji bi ga odveo preko Atlantika, zaključio je da ima temperaturu i vratio se. Tek nakon obiteljskog uvjeravanja, odlučio je sjesti na sljedeći preko-oceanski brod i otići na put.

Malo znamo o tome kako je Gödelu bilo te godine u Princetonu. Postoje rukopisi za predavanje koje je održao u prosincu u Cambridgeu u Massachusettsu i niz rukopisa za predavanja koja je imao u Princetonu u proljeće, ali nema informacija o njegovu osobnom životu. Ono što znamo jest da je nekoliko mjeseci nakon povratka u Beč doživio živčani slom i da je proveo neko vrijeme u liječilištu Purkersdorf, "ustanovi za imućne, koja se sastoji od toplica, klinike i odmarališta" gdje ga je pregledao psihijatar (nobelovac) Julius Wagner-Jauregg.²⁸ Gödel se vratio u Austriju, zemlju pogođenu tužnim događajima. Nacisti su pokušali izvršiti državni udar. Krajem srpnja ubijen je Dollfuss, dan nakon što je mentor Gödelove disertacije Hans Hahn umro od komplikacija nakon operacije karcinoma. Stanje na sveučilištu se pogoršavalo. Administrativno osoblje moralo je stupiti u fašistički Vaterland Front, a sve više profesora za koje se smatralo da su ljevičari ili apolitični Židovi dobivalo je otkaze. Ne znamo kakvu su ulogu u Gödelovu slomu imali ti događaji.

Gledano iz današnje perspektive, opasnost od sigurnog napredovanja fašizma bila je posve očita. Međutim, bez prednosti koje pruža vidovitost, to nije bilo tako jednostavno onima koji bi bili odlučili otići da su znali što će se dogoditi. Čovjek se uvijek nada da će se situacija nekako ipak riješiti. Gödelov brat je primijetio da nitko u njihovoj obitelji nije bio "jako zainteresiran za politiku" pa nisu shvatili značenje Hitlerova dolaska na vlast u Njemačkoj 1933. Ipak, nastavio je:

Dva događaja brzo su nam otvorila oči: ubojstvo kancelara Dollfussa i ubojstva filozofa profesora Schlicka (ubio ga je jedan student nacionalsocijalist) u čijim se krugovima kretao moj brat.²⁹

Gödel je nastavio svoju akademsku karijeru u Beču, no ostao je u dodiru s Institutom u Princetonu glede daljnjih mogućnosti.

Gödel je drugi semestar na Sveučilištu započeo u svibnju 1935, a u rujnu iste godine krenuo je na gostovanje u Princeton. Taj put nije dugo ostao u Americi. Iscrpljen teškom depresijom, dao je otkaz na imenovanje i početkom se prosinca vratio kući. Kasnije je rekao da mu je 1936. (godina u kojoj je ubijen Schlick) bila najgora godina u životu. Njegovo je mentalno stanje i dalje bilo loše i puno je vremena proveo u sanatoriju. No, 1937. godine dolazi do velikog poboljšanja. U lipnju, dok je na Sveučilištu predavao o teoriji skupova, Gödel je postigao značajan napredak u radu na Cantorovoj hipotezi o kontinuumu, prvom problemu sa slavnog Hilbertova popisa iz 1900. (Više o tome kasnije).

U ožujku 1938. Hitler napada Austriju i pripaja je Njemačkoj, a Gödel u listopadu kreće u treći posjet Americi bez Adele, s kojom se bio vjenčao prije nepuna tri tjedna.* Taj put njegova godina u Americi bila je prilično plodna. Nakon jesenskog semestra provedenog u Princetonu, gdje je predavao o svojim otkrićima vezanim

*Postoje neke naznake da je postojao plan da mladi par zajedno otputuje u Princeton. Vidi [Dawson] (u Bibliografiji), str. 128–29.

uz Cantorovu hipotezu o kontinuumu, prihvatio je gostovanje u proljetnom semestru na Sveučilištu Notre Dame. Tamo se smjestio i njegov stari kolega Karl Menger, nakon što je napustio Beč. No, kad je akademska godina završila, vratio se Adeli u Beč krajem lipnja 1939. godine, dva mjeseca prije njemačke invazije na Poljsku koja je navijestila Drugi svjetski rat.

Gödel se vratio u Beč, sada dio nacističke Njemačke, koji su stalno pokušavali pretvoriti u dio Hitlerova "novog poretka". Sveučilišno mjesto *Privatdozenta* je ukinuto, a umjesto njega osnovano je novo mjesto nazvano *Dozent neuer Ordnung* (predavač novog poretka). Za njega se dobivala mala naknada, ali je zahtijevalo i da se kandidat ponovo prijavi i zadovolji glede svojih političkih uvjerenja i čistoće rase. U rujnu, neposredno nakon početka rata, prijavio se i Gödel. Na njegovo iznenađenje i bijes, prijava nije odobrena. Birokrat zadužen za prijave docenata izvijestio je dekana da je Gödel radio sa "Židovom, profesorom Hahnom" i da se kretao u "judeoliberalnim" krugovima. S druge strane, ne znamo je li ikada govorio "protiv nacionalsocijalizma". U takvim okolnostima nije bilo moguće ni odobriti ni odbiti prijavu. Neodlučiv iskaz!

Novi ozbiljan udarac uslijedio je kad je nakon nekoliko mjeseci odugovlačenja, Gödel bio pozvan na liječnički pregled kojim bi se odredilo je li spreman za vojnu službu. Još je jednom bio iznenađen kad su ga proglasili sposobnim za vojsku. Upravo u to vrijeme, u studenom, on i Adela su se iz svog iznajmljenog stana u predgrađu preselili u novo kupljeni stan u centru grada.³⁰ Gödel je očito zaboravljao kakva je situacija oko njega, što se može opisati samo kao patološko odbijanje. To potvrđuje i priča Gustava Bergmanna, člana Bečkog kruga, jednog od niza židovskih izbjeglica koje su stizale u Ameriku. Ubrzo nakon dolaska u listopadu 1938, Gödel ga je pozvao na ručak (tada je gostovao na Princetonu) i osupnuo ga pitanjem: "Što vas dovodi u Ameriku, Herr Bergmann?"³¹ Izgleda da se Gödel došao k sebi u pogledu nesi-

gurnosti situacije ubrzo nakon selidbe, kad ga je na ulici napala grupica nasilnika koji su ga nagurali i bacili mu naočale.³²

Njemačka je ubrzo osvojila Poljsku. Zima 1939/40 postala je poznata kao vrijeme "lažnog rata". Njemački juriš na zapadnu Evropu u kojem je poražena Francuska, bio je još mjesecima daleko. Napad na Rusiju uslijedio je tek u lipnju 1941. godine. Njemačka je potpisala pakt o nenapadanju sa Sovjetskim Savezom, a Staljinova Rusija je vojno opskrbljivala Njemačku. Gödel se u prosincu 1939. konačno odlučio svojski potruditi da napusti Evropu. Za to su mu bile potrebne dozvole za izlazak za Adela i za njega od njemačkih vlasti i viza od američkih, a to nije bilo lako dobiti. Novoimenovani ravnatelj Instituta za suvremena istraživanja u Princetonu, Frank Aydelotte, bio je junak tog pokušaja. Obraćajući se Ministarstvu vanjskih poslova SAD-a, rastezao je istinu do granice pucanja; o Gödelu je pisao kao o "profesoru Gödelu", iako je dobro znao da Gödel nije profesor. U stavci o Gödelovim predavačke dužnosti u Institutu, Aydelotte je mirno slagao: "dužnosti profesora Gödela" bi "uključivale držanje predavanja" ali na naprednom, stoga neformalnom nivou. Osim toga, Aydelotte je pisao njemačkom veleposlanstvu u Washingtonu pri čemu je istaknuo da je Gödel "Arijevac" i da je jedan od najvećih matematičara svijeta. To je upalilo i počeli su stizati svi potrebni dokumenti, pa su Gödeli mogli otići. Kako je prelazak preko Atlantika bio preopasan, putovali su duljim putem kroz Sibir i Japan, zatim preko Pacifika i konačno su polovinom ožujka stigli vlakom u Princeton.³³

Gödela je među prvim pozdravio Oskar Morgenstern koji mu je kasnije postao jedan od najboljih prijatelja. Morgenstern je bio ekonomist i površno je poznao Gödela iz Bečkog kruga, a kad je dobio otkaz s vodećeg mjesta u Austriji prihvatio je ponudu za mjesto profesora na Sveučilištu u Princetonu. Kad se nestrpljivo raspitivao o trenutnoj situaciji u Beču, Gödel mu je odgovorio zapanjujućim: "Kava im ne valja."³⁴

Hilbertova presuda

Na početku Hilbertova popisa problema u predavanju iz 1900. godine bila je Cantorova hipoteza o kontinuumu. To je potvrda da postoje samo dvije veličine beskonačnih skupova realnih brojeva: mali i veliki. Mali beskonačni skupovi realnih brojeva jesu oni čija je veličina jednaka veličini skupa prirodnih brojeva, odnosno oni skupovi koji se sa skupom $\{1, 2, 3, \dots\}$ mogu povezati jedan na jedan. Veliki skupovi su oni koji se mogu povezati jedan na jedan sa skupom svih realnih brojeva. Hipoteza o kontinuumu kaže da svaki beskonačni skup realnih brojeva mora spadati u jedan od ova dva tipa, tako da ne postoji ni jedan skup koji bi bio između. (Jezikom Cantorovih transfinitnih kardinalnih brojeva, iskaz kaže: *kardinalni broj svakog beskonačnog skupa realnih brojeva je ili $\aleph_0$ ili C .*) U svom predavanju Hilbert je rekao da je hipoteza o kontinuumu "vrlo uvjerljiva" ali da je "usprkos upornim pokušajima, još nitko nije uspio dokazati".³⁵ Hilbert se tom problemu vratio četvrt stoljeća kasnije, tvrdeći da pomoću metamatematike može dokazati hipotezu o kontinuumu. No, ispostavilo se da je to bila iluzija. Godine 1934. objavljena je rasprava poljskog matematičara Wacława Sierpińskiego, u cijelosti posvećena iskazima istovjetnim hipotezi o kontinuumu ili iskazima koji su s njom na neki način povezani. No, unatoč svim tim "upornim pokušajima" ostalo je nejasno da li je hipoteza o kontinuumu istinita.

Gödel je došao do spoznaje da je hipoteza o kontinuumu neodlučiva u postojećim formalnim sustavima temelja matematike. Među tim sustavima nije samo sustav PM Whiteheada i Russella, već i sustavi zasnovani na aksiomima teorije skupova. Samo je djelomično mogao potvrditi svoje uvjerenje: godine 1937. shvatio je kako dokazati da u ovim sustavima nije moguće *opovrgnuti* hipotezu o kontinuumu.³⁶ Iako je bio uvjeren da će se ispostaviti da je hipotezu o kontinuumu u ovim sustavima jednako tako

nemoguće *dokazati*, tu tvrdnju nikada uspio dokazati. (Gödelova pretpostavka je potvrđena četvrt stoljeća kasnije kad je Paul Cohen razvio nove metode pomoću kojih je uspio pokazati da je hipoteza o kontinuumu zaista neodlučiva iz tih sustava).

U predavanju u Parizu 1900. i u govoru održanom pred odlazak u mirovinu u Königsbergu 1930, Hilbert je izrazio uvjerenje da je svaki matematički problem rješiv. Je li to što matematičari nikada nisu mogli riješiti Cantorov problem kontinuum bio znak toga da je Hilbert bio u krivu? Neodlučivi iskazi o prirodnim brojevima koje je pronašao Gödel neodlučivi su *unutar* formalnih sustava, ali promatrani izvana oni su posve istiniti, kao što smo jasno vidjeli. No, situacija s hipotezom o kontinuumu je bila drugačija, jer Gödel u svojim radovima nije dao naslutiti je li ona istinita. Do tog trenutka Gödel je bio neopterećen uskim razmišljanjima ljudi koji se bave temeljima matematike i mogao je dalje krčiti putove pomoću svih matematičkih metoda koje su mu bile potrebne. No, sada su ga vlastiti rezultati prisilili da stane i razmisli o filozofskim implikacijama onoga što je postigao.

Pojedini realni brojevi kojima se matematičari obično služe, kao što su π i $\sqrt{2}$, mogu se definirati u formalnim sustavima kakav je PM.No, kao što je to bilo jasno već u Cantorovo vrijeme, kardinalni broj skupa svih mogućih definicija u takvim sustavima je samo $\aleph_0$, a kardinalni broj svih realnih brojeva je C , za koji znamo da je veći. Dakle, većina realnih brojeva nema definiciju, odnosno uopće ih nije moguće definirati. Ta činjenica je sablasna. Kako brojati nešto što se ne može definirati? Ima li smisla razgovarati o skupovima realnih brojeva ako znamo da neke brojeve u takvom skupu ne možemo definirati? Možda nam neodlučivost hipoteze o kontinuumu (postavku njene neodlučivosti iznio je Gödel, a kasnije ju je dokazao Paul Cohen) govori da ona nema jasnog značenja, odnosno da je veoma neodređena. Baviti se tom problematikom znači odlučno se suočiti s pitanjem uloge stvarne beskonačnosti u

matematici, pitanjem za koje je Frege pretpostavio da će dovesti do "teške i presudne bitke".³⁷

Rukopisi predavanja koja je Gödel držao o hipotezi o kontinuumu neposredno nakon što je došao do rezultata tog problema, pokazuju da je i sâm bio nesiguran. Sugerirao je da je lako moguće da je hipoteza o kontinuumu "apsolutno neodlučiva", što bi značilo da Hilbert nije bio u pravu kad je vjerovao da se svaki matematički problem može riješiti. Početkom 1940-ih Gödel je počeo proučavati filozofiju, bez sumnje djelomično i zato da mu to pomogne da shvati beskonačne skupove. Posebno se posvetio Leibnizu i osjećao je da mu je taj klasični filozof vrlo blizak.

Članovi Instituta za napredna istraživanja nisu imali obavezu predavati, raditi sa studentima, čak ni objavljivati. Gödel je na takvu opuštenu atmosferu reagirao tako da je predavao ili objavljivao samo uz posebne pozive. Važan izvor takvih poziva bila je *Library of Living Philosophers*, niz knjiga od kojih je svaka bila posvećena jednom živućem filozofu. Svaki takav zbornik sastojao od zatražene skupine eseja o idejama određenog filozofa, uz odgovore samog tog filozofa. Gödela su pozvali da napiše priloge za zbornike radova o Bertrandu Russellu, Albertu Einsteinu i Rudolfu Carnapu. Zbornik o Russellu pojavio se 1944. uz prilično šokantan Gödelov esej. Nakon oštre diskusije o Russellovoj matematičkoj logici, Gödel je izjavio da se skupovi i pojmovi mogu "zamišljati kao stvarni predmeti ... koji postoje neovisno o našim definicijama i konstrukcijama ... pretpostaviti takve predmete jednako je opravdano kao pretpostaviti fizičke objekte i postoje prilično jednaki razlozi koji nas navode da vjerujemo u njihovo postojanje". Toliko o neodređenosti! Tri godine kasnije, u naručenom članku koji je trebao objasniti hipotezu o kontinuumu, Gödel je ponovio svoje uvjerenje da skupovi uistinu postoje i naglasio je da su postojeći sustavi temelja matematike nužno nepotpuni i da ih je moguće proširiti. Predvidio je da ćemo pronaći nove aksiome

koji će konačno i potpuno riješiti hipotezu o kontinuumu i tako omogućiti dokaz njezine *neistinitosti*.³⁸

Do njegova rada na hipotezi o kontinuumu, Gödelovo druženje s filozofskim problemima uglavnom se sastojalo od ignoriranja dvojbi koje su sprečavale druge da vide ono što je njemu bilo jasno. No, sad se našao u dubljim filozofskim vodama. Što su uopće brojevi? Jesu li oni puka ljudska tvorevina ili imaju i neko objektivno postojanje? Je li iskaz $2 + 2 = 4$ bio istinit i prije nego su na planeti postojali ljudi koji su to potvrdili? O tim se stvarima raspravljalo stoljećima. Učenje o tome da apstraktni predmeti (poput brojeva ili skupova brojeva) objektivno postoje i imaju osobine koje ljudi mogu samo otkriti, a ne izmisliti, općenito se pripisuje Platonu i naziva se platonizmom. Gödelov pristanak na to učenje dovelo je do jasne promjene njegovih stavova. U predavanju koje je 1933. držao na Cambridgeu u Massachusettsu, još je tvrdio da platonizam ne može "zadovoljiti kritični um".³⁹ Istraživači teorije skupova posljednjih desetljeća dvadesetog stoljeća slijedili su Gödelov na-log da traže nove aksiome, no unatoč tome što je napisano puno zanimljivih radova, hipoteza o kontinuumu nije riješena.

Sljedeći ulomak iz Gödelova priloga zborniku radova o Russellu odnosi se na Leibnizov omiljeni projekt *univerzalne karakteristike* i zaista je zapanjujuć. Iako je pisao više od dva stoljeća nakon Leibnizove smrti, Gödel je još uvijek imao nade da se takav jezik može razviti i da će to uzrokovati revoluciju u matematičkoj praksi:

No, nema razloga da se prestanemo nadati. Leibniz u spisima o *Characteristica universalis* nije govorio o utopijskom projektu. Ako vjerujemo njegovim riječima, on je prilično dobro razvio račun zaključivanja, ali je čekao da sjeme padne na plodno tlo prije nego ga objavi. Čak je i odredio vrijeme potrebno da nekoliko izvanrednih znanstvenika razvije njegov račun do stupnja na kojem bi "čovječanstvo imalo novu vrstu instrumenta koji bi uvećao moć zaključivanja puno više nego što je bilo koji optički

instrument ikada pomogao vidu". Navodi vrijeme od pet godina i tvrdi da njegovu metodu nije ništa teže naučiti nego tadašnju matematiku ili filozofiju.⁴⁰

Kako smo vidjeli, ono što je napravio Leibniz pomoću računa zaključivanja, unatoč tome što je bilo izvanredno za svoje vrijeme, bilo je sitnica u usporedbi s onim što su kasnije postigli Boole i Frege. Što li je mislio Gödel? Na žalost, čini se da je vjerovao da je postojala zavjera koja je potisnula Leibnizove ideje. Gödel je imao mnoštvo vrlo čudnih ideja o raznim temama, koje su u najmanju ruku graničile s kliničkom paranojom. No, njegov ugled među logičarima je bio toliko velik da su oklijevali ne uvažiti bilo koju njegovu ideju. (Više o Gödelovim duševnim problemima kasnije.)

Gödela su zamolili da za *Library of Living Philosophers* piše o Einsteinu, a on je za temu odabrao vezu između Einsteinove teorije relativnosti i Kantove filozofije. Došao je do zaključka da jednadžbe opće teorije relativnosti (Einsteinova teorija gravitacije) imaju rješenja prilično drugačija od onih koja bi bilo koji fizičar očekivao. Značajno je da Gödelovo rješenje tih jednadžbi predstavlja svijet u kojemu putovanje koje je dovoljno dugo i brzo, može završiti u prošlosti. Takav svijet je podložan paradoksima putovanja kroz vrijeme, kakvi su poznati čitateljima znanstvene fantastike. Na primjer, može li netko otputovati u prošlost i ubiti svog djeda ili baku dok su još bili djeca? Gödelov odgovor na tu dilemu bio je iznenađujuće nefilozofski. On je istaknuo da bi takvo putovanje bilo prilično nepraktično zbog velike količine potrebnog goriva.

Gödel je uvijek vrlo pedantno iznova pregledavao svoje članke i ne bi ih dao objaviti dok nije bio potpuno zadovoljan. Čak bi i nakon objavljivanja, ponovno tiskao neke radove kako bi ih još jednom pregledao. To je bilo veoma frustrirajuće za njegove urednike koji su mogli samo gledati kako im izmiču rokovi. U slučaju eseja o Rudolfu Carnapu koji je Gödel obećao *Library of Living Philosoph-*

hers, zbornik se na koncu pojavio bez njegova priloga. No, među Gödelovim spisima pronađeno je šest različitih kritika koje je namjeravao objaviti o Carnapovim stavovima o logici i matematici. Urednici njegovih sabranih djela odlučili su objaviti dvije. Među spisima pronađen je i jedan rukopis, nacrt (s različitim umetnutim dijelovima, izbrisanim dijelovima i fusnotama) teksta predavanja koje je Gödel imao u Providenceu na Rhode Islandu u božićnom tjednu 1951. godine.* U predavanju pod naslovom *Neki osnovni teoremi temelja matematike i njihove implikacije*, Gödel je Hilbertovo načelo o rješivosti svakog matematičkog pitanja stavio u kontekst prirode ljudskog uma. Postavio je pitanje da li je ljudski um u biti jednak računalu. O tom se pitanju još uvijek žustro polemizira u kontekstu rasprava o budućnosti umjetne inteligencije. Nije dao odgovor na pitanje (iako je na kraju postalo jasno da on vjeruje da je odgovor negativan), ali je tvrdio da je svaki mogući odgovor "odlučno protivan materijalističkoj filozofiji". Ako se potpuna moć ljudskog uma može imitirati ograničenom mehaničkom napravom, onda sâm Gödelov teorem o nepotpunosti može pokazati da postoji određen istinit iskaz o prirodnim brojevima, koji ljudi ne mogu dokazati. Dakle, postoji *apsolutno neodlučiv iskaz*. To je očito protivno Hilbertovu načelu. Gödel smatra da je i idealistička filozofija donekle potrebna, da bi iskaz o tome da navodno objektivno postoje prirodni brojevi sa svojstvima izvan onih koja mogu potvrditi ljudi, imao smisla. S druge strane, Gödel je razmišljao da ako se ljudski um ne može svesti na mehanizam, a mozak može (što je Gödel smatrao očitim), onda znači da um nadilazi fizičku realnost, što nije u skladu s materijalizmom. Ova argumentacija nije sasvim uvjerljiva, ali je Gödel još jedanput pokazao svoje sjajne mogućnosti razmišljanja u radikalno novim i neočekivanim smje-

Bilo je to ugledno Gibbs predavanje koje se održava jedanput godišnje na poziv Američkog matematičkog društva. Imao sam sreću slušati to predavanje koje je jako utjecalo na moje osobne poglede na temelje matematike.

rovima jer je povezao razmišljanja iz teorijske logike, psihologije čovjeka, krajnjih mogućnosti računala i fundamentalne filozofije.⁴¹

Tužan kraj jednog čudaka

Kurt Gödel se približavao mirovini i nadao se da će njegovo mjesto na Institutu za napredna istraživanja preuzeti logičar Abraham Robinson koji je tada predavao na Yaleu. Prije nego se to moglo dogoditi, Robinsonu je dijagnosticiran rak gušterače i ubrzo je umro. Zadnjih mjeseci života dobio je od Gödela sljedeće pismo:

S obzirom na ono što sam rekao dok smo prošle godine raspravljali [o Robinsonovu dolasku na Institut na dulje vrijeme], možeš zamisliti koliko mi je žao zbog tvoje bolesti, ne samo iz osobnih razloga, već i zbog logike i Instituta za napredna istraživanja.

Kao što znaš, moji stavovi o mnogim stvarima nisu uobičajeni. Dva takva stava odnose se i na ovaj slučaj:

1. Ne vjerujem da je ijedna medicinska dijagnoza 100% točna.
2. Iskaz da se naše ja sastoji od proteinskih molekula meni se čini najsmješnijom tvrdnjom ikada izrečenom.

Nadam se da se barem u ovom drugom slažeš sa mnom. Drago mi je čuti da unatoč bolesti ipak možeš provoditi neko vrijeme na Odsjeku za matematiku. Siguran sam da će ti to dobro doći.⁴²

Ovo pismo je Gödel u najčistijem obliku. Ono što je rekao o svom nepovjerenju prema medicinskim dijagnozama spada u njegove umjerenije stavove. Kada je patio od zakrčenosti urinarnog kanala koju je uzrokovalo povećanje prostate, ne samo da je odbio prihvatiti dijagnozu, već je zahtijevao da njegov problem bude tretiran dodatnim dozama laksativa o kojemu je već postao prilično ovisan. Jednom prilikom je ljutito iščupao kateter koji su mu stavili. Odbijao je operaciju koja obično olakšava takve poteškoće i na koncu je prihvatio kateter i koristio ga do kraja života.

Još jedan primjer Gödelu svojstvenog razmišljanja u pokušaju da utješi Robinsona je usputno spominjanje uvjerenja da je duh više od proteinskih molekula i da postoji zagrobni život.

Granica između Gödelovih neortodoksnih stavova i potpune kliničke paranoje nije uvijek bila jasna. Morgenstern se sjeća kako se iznenadio kad je shvatio da Gödel prilično ozbiljno shvaća duhove. Štoviše, Gödel je bio uvjeren da hladnjak i radijatori u stanovima u Princetonu ispuštaju štetne plinove, zbog čega su se on i Adele nekoliko puta selili. Na kraju je jednostavno uklonio grešne uređaje, a njihov stan je postao "prilično neudobno mjesto u zimskom periodu".

Zatražio je državljanstvo Sjedinjenih Država i za površan ispit o institucijama Amerike koji je trebao položiti kod bilježnika, pripremio se na tipično svoj način – pedantno je analizirao Ustav, onako kako bi smo on to mogao. Štoviše, bio je vrlo uznemiren, jer je zaključio da je Ustav zapravo nekonzistentan. Dok su se vozili u glavni grad Trenton na polaganje ispita, njegovi su svjedoci Einstein i Morgenstern pokušavali Gödelu odvući pažnju od njegovih otkrića, bojeći se da bi moglo biti problema ako se načne ta tema. Einstein je pričao vic za vicem. Međutim, kad je sudac pitao Gödela misli li da je u Sjedinjenim Državama moguća diktatura poput one u Njemačkoj, kandidat je počeo objašnjavati svoje otkriće. Na sreću, sudac je odmah shvatio s kim ima posla i prekinuo ga je pa je sve sretno završilo.

Možemo se smijati takvim anegdotama koje otkrivaju različite vidove Gödelova čudaštva. Ali, nije sve bilo tako zabavno. Bio je paranoičan i kad je riječ o hrani, a njegova vjerna žena je sama bila previše bolesna da bi bila od koristi, pa se Gödel doslovno izgladnio na smrt. Tako je 14. siječnja 1978. završio život jednog od najvećih umova dvadesetog stoljeća.⁴³

7 Turing stvara svenamjensko računalo

Charles Babbage je već 1834. godine imao ideju o automatskom računskom stroju. Njegov zamišljeni, ali nikad konstruirani *analitički stroj* trebao izvoditi numeričke izračune najrazličitije vrste.* Da bi naglasio moć i doseg svog stroja, Babbage je dosjetljivo zamijetio da “može sve osim komponirati country ples”.¹ Babbage je smatrao samorazumljivim da se od strojeva napravljenih za računanje ne može očekivati da komponiraju country plesove. Nama se to danas ne čini nemogućim. Današnja računala mogu se programirati da komponiraju country plesove (iako oni nisu baš jako kvalitetni). Nekome tko bi danas pokušavao naći sličnu usporedbu da bi naglasio moć i doseg računala, ne bi bilo lako završiti rečenicu. Računalo sigurno već može riješiti, ili neki stručnjak uporno tvrdi da će to uskoro moći, gotovo svaki zadatak koji sadrži simbole, brojeve ili tekst. Jasno je da se drastično promijenio i sam naš pojam o tome što je to izračunava. Sadržaj toga pojma Alan Tu-

Charles Babbage rođen je u Londonu u prosincu 1791. godine. Kao uspješan matematičar bio je dio grupe koja je pokušavala prenijeti matematičke ideje s kontinenta na britanska sveučilišta. Posebno su ga zanimala mehanička izračunavanja i stvorio je stroj koji je mogao učinkovito konstruirati matematičke tablice, takozvani “stroj razlike” (*difference engine*). Umro je 1871, razočaran i ogorčen, frustriran što nije uspio završiti projekt.

ring je formulirao 1935. godine, dok se bavio jednim problemom matematičke logike koji je postavio David Hilbert.

Babbage je svoj stroj namjeravao u potpunosti izgraditi od mehaničkih dijelova kakvi su zupčanici, no planirana naprava je bila vrlo složena i ne iznenađuje što nije uspio. Strojevi koji su imali doseg kakav je zamišljao Babbage, izgrađeni su tek početkom tridesetih godina, nakon razvoja elektromehaničkih kalkulatora koji su koristili električne releje. No, 1930-ih i 1940-ih godina nitko tko se time bavio nije govorio o strojevima koji bi obavljali nešto više od osnovnih računskih operacija. Kao što ćemo vidjeti, Babbage-ovu viziju prvi je oživotvorio Howard Aiken. Napisao je:

Ako bi se ispostavilo da temeljna logika stroja proizvedenog za izračunavanje diferencijalnih jednadžbi odgovara logici stroja koji radi račune u robnoj kući, smatrao bih to najčudnijom koincidencijom s kojom sam se ikada susreo.²

Ovu zapanjujuću izjavu Aiken je dao 1956. godine. Tada su već bila u prodaji računala koja se mogu programirati za obje vrste spomenutih zadataka. Da je Aiken shvatio značaj rada Alana Turinga, objavljenog dva desetljeća ranije, nikada ne bi izjavio nešto tako besmisleno.

Dijete Imperija

Alanov otac, Julius Turing, bio je uspješan državni službenik u Indiji. Usprkos tome, u proljeće 1907. godine, nakon više od desetljeća službe, odlučio se vratiti u Englesku. Kući je putovao preko Pacifika i tada je sreo Alanovu majku Ethel Saru Stoney. Ona je rođena u Madrasu, odrasla u Irskoj, neko vrijeme provela je u Parizu, da bi se tada vratila u Indiju. Na putu se brzo razvila brodska ljubavna priča i mladi par je završio na proputovanju Sjedinjenim Državama, gdje su obišli park Yellowstone. Uz dozvolu njezina

oca vjenčali su se u jesen u Dublinu. Te su se zime vratili u Indiju. Alanov stariji brat John, rođen je u rujnu 1908. godine. Julius je često putovao na jug Indije zbog brojnih obaveza, a najčešće su ga pratile Ethel Sara i dijete. Alan je začet u jesen 1911. na jednom takvom putovanju. Kad je Julius uspio dobiti novi dopust, obitelj je zajedno otplovila u Englesku. Alan Mathison Turing rođen je u Londonu 23. lipnja 1912.³

Nemilosrdna logika imperija onemogućavala je zajednički život obitelji Turing. Očeva karijera je bila u Indiji. Tamo su tropske bolesti posebno pogađale malu djecu, a osim toga ona u Indiji nisu mogla dobiti prikladno obrazovanje. Majka je mogla biti ili s mužem ili s djecom pa je obitelj bila na okupu samo za vrijeme očeva dopusta. Alanu je bilo svega petnaest mjeseci kad je majka odlučila njega i njegovog četverogodišnjeg brata ostaviti u Engleskoj da žive s umirovljenim pukovnikom i njegovom ženom, dok je ona otišla natrag u Indiju. Gospođa Turing 1915. godine je uspjela provesti nekoliko mjeseci s djecom, a u proljeće 1916. oba roditelja su se vratila kući. No, ovog puta zaprijetila je opasnost od njemačkih podmornica zbog kojih je gospođa Turing ostala u Engleskoj, a njezin muž se vratio u Indiju. Tako je strašni rat zapravo koristio Alanu, jer je majka ostala s njim. On je bio napredno, sretno dijete koje je brzo stjecalo prijatelje, ali je bio i nespretni i neuredan. Iako su mnogi šestogodišnji dječaci odlazili u internate, Alanova majka je sina ostavila uza se. Poslala ga je u obližnju školu da nauči latinski jer se smatralo da nema dobrog obrazovanja bez latinskog jezika. Satove su dodatno otežavala Alanova nemarnost, razlivena nalivpera i njegov loš rukopis.

Alanova majka je ponovno otišla u Indiju 1919. godine, a sedmogodišnji se Alan vratio u pukovnikov dom. Nakon gotovo dvije godine, gospođa Turing je uvidjela da joj dijete nije dobro napredovalo. Umjesto veselog dječaka kojeg je ostavila, našla je "nedruštveno", zatvoreno dijete čije je najosnovnije obrazovanje



Alan Turing

bilo jako zanemareno. Nakon što se maksimalno potrudila da ga pripremi, upisala ga je u mali internat čiji je učenik već bio njegov brat. Bili su zajedno svega nekoliko mjeseci, a onda je John otišao u javnu školu.* Alana su roditelji ostavili da se sâm nosi sa životom u internatu. Pokazao je kako se osjeća kada je nesretan trčao za automobilom u kojem su odlazili njegovi roditelji.

U četrnaestoj godini, kad je Alan Turing krenuo u javni internat Sherborne, već je počeo gajiti strast za prirodnim znanostima i matematikom. No, našao se u okruženju u kojem su se najviše cijenili natjecateljski sportovi, a najmanje matematika. Jedan njegov učitelj je znanost općenito smatrao "niskom i prepredenom", a za matematiku je govorio da od nje ostaje zadah u sobi.⁴ Alanova matematička genijalnost je bila prepoznata, ali i omalovažena, a njegove roditelje su upozorili da bi im sin mogao postati obični znanstvenik. Najgori su bili njegovi prljavi radovi puni mrlja, napisani gotovo nečitljivim rukopisom. Alan se nije puno družio s drugim dječacima i djevojčicama i nije pretjerano pazio na satovima, ali je na ispitima postizao dobre rezultate. Već se tada pomalo bavio vlastitim matematičkim istraživanjima te je proučavao Einsteinovu teoriju relativnosti.

Alanov se život promijenio kad je našao prijatelja, a i više od toga, u Christopheru Morcomu. Chris je, kao i Alan, gajio strast za znanosti i matematikom, ali je za razliku od njega bio marljiv učenik koji je ozbiljno shvaćao svoje školske radove i čiji su pismeni radovi bili besprijekorno uredni. Alan se bezgranično divio Chrisu i odlučio je biti sličniji njemu. Ne znamo u kojem je trenutku svoga života Alan Turing postao sasvim svjestan svoje homoseksualnosti, ali prirodno je pretpostaviti da je prijateljstvo s Morcomom, barem što se tiče Alana, imalo erotski prizvuk. Jedan

*Kao što većina čitatelja vjerojatno zna, britanske javne škole (eng. *public schools*) su zapravo elitne privatne ustanove. Takvu je školu bilo važno pohađati kako bi dječak postao dio uspješne više srednje klase.

Turingov biograf naziva Alanove osjećaje "prvom ljubavi", i oni su zaista bili tako intenzivni. Nemoguće je znati kako bi se njihov odnos razvijao i kako bi se Alanovi osjećaji oblikovali da sve nije završilo tragedijom. Alan nije znao da njegov prijatelj boluje od tuberkuloze; Chris je umro u veljači 1930. godine. Zauvijek je ostao u Turingovom srcu kao simbol savršenstva.⁵

Već prije zadnje godine u Sherborneu, Turing je postao tako uspješan u učenju da je dobio stipendiju za King's College na Sveučilištu u Cambridgeu. Osim smještaja i hrane, dobio je i stipendiju od 80£ godišnje, otprilike polovicu ondašnje zarade kvalificiranog radnika.⁶ Matematika u Sherborneu nije značila ništa, ali se u Cambridgeu Turing zato našao u okruženju u kojem je njegova matematička genijalnost mogla cvasti. G. H. Hardy (1877–1947) bio je veliki matematičar s Cambridgea, a njegova knjiga *Course of Pure Mathematics* (objavljena 1908.) bila je klasični udžbenik iz kojeg su se generacije studenata matematike hvatale u koštac s osnovnim obilježjima limesa. (Knjiga je još uvijek u tisku.) Dokumentarni film o Hardyju prikazan je na programu javne televizije (prvo prikazivanje bilo je 1988.) i u njemu on govori o matematičkoj genijalnosti Ramanujana, samoukogpoštanskog službenika iz Madrasa. Turing je, dakle, tamo pohađao Hardyjeva predavanja, kao i predavanja sir Arthura Eddingtona, matematičkog fizičara i astronoma koji je 1919. vodio jednu ekspediciju u zapadnu Afriku. Potpuna pomrčina Sunca omogućila im je da promatraju zvjezdanu svjetlost koja prolazi blizu Sunca i tako dođu do prve potvrde Einsteinova predviđanja iz njegove opće teorije relativnosti, da će se takva svjetlost saviti zbog gravitacijskog privlačenja Sunca. Eddingtonova predavanja su sadržavala pitanje o tome zašto se toliko statističkih promatranja poredalo duž Gaussove krivulje normalne distribucije. Ona su pokrivala tada prilično novu kvantnu teoriju koja je bila revolucionarno otkriće u fizici. No, ozbiljnu Turingovu pažnju iz tog područja privlačila je nedavno

objavljena knjiga o matematičkim temeljima kvantne mehanike Johna von Neumanna. Nju je dobio u Sherborneu kao nagradu.

Sveprisutnost zvonolike normalne distribucije, koja je naglašena u Eddingtonovim predavanjima, fascinirala je Turinga i on je tražio matematičko objašnjenje za nju. Našao ga je dok je izvodio dokaz da najrazličitije statističke distribucije teže u svojoj graničnoj vrijednosti ka normalnoj distribuciji. To je bila primjena limesa diferencijalnog računa *par excellence*. Alan Turing nije znao da je otkrio nešto što je već dobro poznato kao centralni teorem limesa. Unatoč tome, njegovo je postignuće bilo dovoljno impresivno da mu bude ponuđeno mjesto sveučilišnog nastavnika. Turing je postao nastavnik na Cambridgeu, uz godišnju plaću od 300£, trogodišnji izbor na to mjesto i gotovo siguran reizbor na još tri godine. Tamo nije imao neke posebne dužnosti i večerao je za "višim stolom", doslovno s visoka gledajući studente. Mogao je i dodatno zaraditi od podučavanja studenata. To imenovanje je Turinga dovelo na put koji obično vodi u akademsku karijeru.* Na Sherborneu su proslavili uspjeh svog bivšeg učenika, zaboravivši su na loš miris koji su pripisivali matematičarima i upozorenja o tome da bi mogao postati obični znanstvenik. Učenici su dobili pola dana slobodno, a besramno su se ponavljali sljedeći stihovi:

Turing Alan
mora da je bio sjajan
kad je tako rano
profesor za stalno.⁷

A Turing je svojim prvim objavljenim radom ubrzo dokazao svoju odvažnost usavršivši teorem koji je von Neumann bio dokazao u

*Doktorska titula je u Francuskoj, Njemačkoj i Sjedinjenim Državama bila nužna za dobivanje mjesta na sveučilištu, ali u Engleskoj se rijetko tražila prije Drugog svjetskog rata.

vrlo specijaliziranom području poznatom kao teorija gotovo-periodičkih funkcija i bio je na dobrom putu da postane uspješan matematičar čija dostignuća su zanimljiva isključivo drugim stručnjacima s istog područja. No, kad je počeo pohađati niz predavanja o temeljima matematike na Cambridgeu u proljeće 1935, sve se promijenilo.

Hilbertov Entscheidungsproblem

Leibniz je sanjao o tome da ljudski razum svede na računanje, o moćnim računalnim strojevima koji bi izvodili izračune. Frege je po prvi puta osigurao sustav pravila koja bi mogla uvjerljivo odgovarati čitavom ljudskom deduktivnom zaključivanju. Tražeći odgovor na pitanje koje je postavio Hilbert dvije godine prije, Gödel je 1930. u doktorskoj disertaciji dokazao da su Fregeova pravila potpuna. Hilbert je također tražio jasne metode računanja pomoću kojih bi se uvijek moglo, uz određene premise i traženu konkluziju napisane u notaciji koja se kasnije nazvala logikom prvog reda, utvrditi mogu li Fregeova pravila omogućiti da se taj dana konkluzija izvesti iz danih premisa.⁸ Zadatak pronalaženja takvih metoda postao je kasnije poznat kao *Entscheidungsproblem* (doslovno "problem odlučivosti"). Naravno da sustavi metoda računanja za rješavanje određenih problema nisu bili ništa novo. Tradicionalna matematika bila je uvelike sastavljena od takvih metoda računanja, poznatih pod nazivom *algoritmi*. Počinjemo učenjem algoritama za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje brojeva, zatim prelazimo na algoritme služenja algebarskim izrazima i rješavanja jednadžbi. Ako stignemo do diferencijalnog računa, naučit ćemo kako koristiti algoritme koje je izvorno za tu problematiku otkrio Leibniz. No, Hilbert je tražio algoritam još neviđenog dosega. Algoritam za njegov Entscheidungsproblem

bi u načelu sveo sve ljudsko deduktivno zaključivanje na puko računanje. Time bi se u velikoj mjeri ostvario Leibnizov san.

Matematičari često vole pristupati teškim problemima na dva načina. S jedne strane, pokušavaju učiniti što mogu s posebnim slučajevima općeg problema. Krećući se u drugom smjeru, pokušavaju svesti opći problem na određene posebne slučajeve. Ako sve protekne kako treba, ta se dva pristupa sreću na pola puta i daju rješenje za opći problem. Rad na Entscheidungsproblemu kretao se točno tim putem i zaista, praznina između posebnih slučajeva za koje su pronađeni algoritmi i slučajeva na koje je sveden opći problem, smanjila se toliko da je bilo moguće nadati se da će mali daljnji napredak potpuno ukloniti prazninu i omogućiti algoritam koji pokušavao pronaći Hilbert.⁹ Jedan od skeptičnih bio je i G. H. Hardy s Cambridgea koji je pomalo ljutito rekao: "Naravno da takav teorem ne postoji i dobro da je tako jer ako bi postojao, imali bismo mehanički skup pravila za svaki matematički problem i naš posao kao matematičara bio bi završen."¹⁰ Hardy sigurno nije bio prvi majstor koji je bio uvjeren kako njegovu vještinu nikako ne može zamijeniti puki stroj, no ispostavilo se da je ovaj majstor bio u pravu!

Drugi nastavnik s Cambridgea, M. H. A. (Max) Newman, petnaest godina stariji od Turinga i nastavnik na Collegeu St. John, imat će trajnu i važnu ulogu u mladićevoj karijeri. Newman je dao pionirske doprinose topologiji koja je tada bila prilično nova grana matematike. Pojednostavljeno rečeno, topologija se bavi svojstvima geometrijskih likova koji se proširivanjem ne mijenjaju, ako ne dođe do trganja. Newmanova predavanja o topologiji na Cambridgeu uvela su mnogo mladih matematičara u to područje koje se razvijalo, a napisao je i odličnu knjigu o toj problematici. Na Međunarodnom kongresu matematičara 1928. u Bologni, Newman je čuo da je Hilbert postavio ciljeve za koje je samo dvije godine kasnije Kurt Gödel pokazao da se ne mogu ostvariti.

Očito zaintrigiran tim otkrićima, Newman je u proljetnom semestru 1935. održao niz predavanja o temeljima matematike u kojima je vrhunac bio Gödelov teorem o nepotpunosti. Na tom kolegiju Turing se susreo s Hilbertovim Entscheidungsproblemom. Neovisno o nevjerici ljudi kakav je bio Hardy, nakon Gödelova rada bilo je stvarnoteško vjerovati da postoji algoritam kakvog je tražio Hilbert. Alan Turing je počeo razmišljati kako bi se moglo *dokazati* da takav algoritam ne postoji.

Turingova analiza postupka izračunavanja

Turing je znao da je *algoritam* obično određen nizom pravila koja neka *osoba* precizno i mehanički slijedi, poput recepta u kuharici. No, on je težište prebacio s tih pravila na ono što osoba *stvarno* čini dok ih izvršava. Uspio je pokazati, zanemarujući sve nebitne detalje, kako se takvu osobu može ograničiti da izvede nekoliko izuzetno jednostavnih osnovnih radnji, a da se konačni rezultat računanja ne promijeni. Sljedeći Turingov korak je bio pobrinuti se za to da se osobu može zamijeniti strojem koji može izvoditi iste takve osnovne radnje. Zatim je, pomoću dokaza da nijedan stroj koji može vršiti te osnovne operacije ne može odlučiti slijedi li tražena konkluzija iz danih premisa pomoću Fregeovih pravila, zaključio da algoritam za Entscheidungsproblem ne postoji. Usput je pronašao i matematički model svenamjenskog računalnog stroja.

Pokušat ćemo slijediti Turingov način razmišljanja tako što ćemo zamisliti da i sami promatramo kako napreduje računanje. Što je zapravo radila osoba koja računa? Ona (čini se da su taj posao tridesetih godina uglavnom obavljale žene*) nešto bilježi na list papira. Vidjelo se kako prebacuje pažnju s onoga što je ranije

*Zapravo je tada i sama riječ *computer* [doslovno računar/ka, op. ur.] označavala osobu (obično žensku) čiji je posao bio izračunavanje.

napisala na ono što sada piše. Turing je taj opis htio lišiti nevažnih detalja. Je li pila kavu dok je radila? To je sigurno nebitno. Je li pisala običnom ili kemijskom olovkom? I to je nevažno. Što je s veličinom listova papira? Ako je papir malen, ona će češće morati gledati u prošli papir. No, Turing se ubrzo uvjerio da je to stvar praktičnosti, a ne nužnosti. Ništa se bitno ne bi promijenilo ako bi bila ograničena na tako kratak papir na kojem ne bi mogla pisati simbole jedan ispod drugoga, odnosno ako bi koristila nešto poput svitka papira podijeljenog na vodoravne kvadrate. Pojednostavimo i pretpostavimo da je izvodila sljedeći primjer množenja:

$$\begin{array}{r}
 4231 \\
 \times 77 \\
 \hline
 29617 \\
 + 296170 \\
 \hline
 325787
 \end{array}$$

Slobodno možemo zamisliti da svoj posao obavlja niz traku papira podijeljenu u kvadrate, jer time nećemo ništa značajno promijeniti:

4	2	3	1	×	7	7	=	2	9	6	1	7	+	2	9	6	1	7	0	=	3	2	5	7	8	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Turing je bio uvjeren da, iako je možda neugodno izvoditi kompliciran izračun na takvoj jednodimenzionalnoj traci, tu ne postoji neki temeljni problem. Nastavimo sa samim procesom izračunavanja, koji je sada ograničen na svitak papira: gledamo kako naša ispitanica gleda lijevo-desno po traci, ispisuje simbole, povremeno se vraća, briše simbole i na njihovom mjestu ispisuje nove. Njezina odluka o tome što će sljedeće napisati ovisit će ne samo o tome na koje simbole obraća pažnju, nego i o njezinom trenutnom stanju

uma. Čak i u tom našem jednostavnom primjeru množenja, njeno stanje uma dok ispisuje znamenke određuje hoće li ih pomnožiti ili zbrojiti. Na početku traka izgleda ovako:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \Downarrow & & \Downarrow & \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \times & 7 & 7 = \end{array}$$

Strelicom ($\Downarrow$) nad znamenkama 1 i 7 označili smo da prvo obraća pažnju na te simbole. Njihovim množenjem dobiva broj 7 i to piše na traku:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \Downarrow & & \Downarrow & \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \times & 7 & 7 = 7 \end{array}$$

Sada pažnju prebacuje na znamenke 3 i 7 koje će zatim pomnožiti. Kad faza izračunavanja u kojoj množi dva broja završi, trebat će još dodati dva međuprodukta:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & \Downarrow & & & & \Downarrow & \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \times & 7 & 7 = & 2 & 9 & 6 & 1 & 7 + & 2 & 9 & 6 & 1 & 7 & 0 = \end{array}$$

Ovu fazu počinje zbrajanjem znamenaka 7 i 0 i dobiva

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & \Downarrow & & & & \Downarrow & \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \times & 7 & 7 = & 2 & 9 & 6 & 1 & 7 + & 2 & 9 & 6 & 1 & 7 & 0 = 7 \end{array}$$

Sada mora zbrojiti brojeke 1 i 7 i dobiti broj 8. Uočite da su brojke na koje u tom trenutku obraća pažnju iste one koje je pomnožila kad je počela s izračunom. No, iako su brojke iste, stanje njenog uma je drugačije i ovaj put ih zbraja.

Jednostavan primjer koji smo upravo izložili pojašnjava ključna obilježja bilo kojeg izračunavanja. Osoba koja izvodi računanje u aritmetici, algebri, diferencijalnom računu ili bilo kojoj drugoj grani matematike, radi pod sljedećim ograničenjima:

- U svakoj fazi izračuna obraća pažnju tek na mali broj simbola.
- Koja će se djelatnost izvoditi u nekoj fazi, ovisi samo o tome na koje je simbole usmjerena pažnja i o trenutnom stanju uma osobe koja izvodi računanje.

S koliko simbola čovjek može istodobno raditi? I koliko je simbola doista potrebno da se račun točno izvede? Što se prvog pitanja tiče, to svakako ovisi o osobi, ali u svakom slučaju s ne previše simbola. Odgovor na drugo pitanje je: jedan. Razlog tome je što se učinak obraćanja pažnje na više simbola istovremeno uvijek može postići tako da se redom obraća pažnja na svaki simbol pojedinačno.¹¹ Nadalje, učinak micanja pažnje s jednog kvadrata na traci na drugi, udaljeni kvadrat, može se postići slijedom koraka u kojima se pomičemo za po jedan kvadrat lijevo ili desno. Ta analiza vodi zaključku da se svako izračunavanje može zamisliti kao sljedeći postupak:

- Račun se izvodi pisanjem simbola u kvadratu na označenoj papirnatost traci.
- Osoba koja izvodi račun pri svakom koraku obraća pažnju na simbol zapisan u točno jednom kvadratu.
- Njezin sljedeći postupak ovisi samo o tom simbolu i o njezinom stanju uma.
- Taj sljedeći korak sastojat će se od ispisivanja simbola na onaj kvadrat na koji je obraćala pažnju, a zatim će moći prebaciti pažnju na prvi sljedeći kvadrat slijeva ili zdesna.

Sad se dobro vidi da se osoba koja izvodi račun može zamijeniti strojem: traka – koju možemo vizualizirati kao magnetsku traku na kojoj su zapisane kodirane informacije koje predstavljaju simbole – kreće se lijevo-desno u stroju. Stanja uma osobe koja izvodi

račun predstavljena su različitim konfiguracijama unutar stroja. Stroj mora biti projektiran tako da u svakom trenutku reagira na točno jedan simbol na traci, *očitaní simbol*. Ovisno o svojoj unutarnjoj konfiguraciji i očitanoj simbolu, stroj će zapisati simbol na traku (na mjesto očitanoj simbola) a zatim će ili nastaviti očitavati isti kvadrat, ili će se prebaciti na prvi susjedni položaj slijeva ili zdesna. Pri izračunu nije važno kako je stroj konstruiran pa čak ni od čega je izrađen; važno je samo da ima sposobnost razmatrati određeni broj različitih *konfiguracija* (također zvanijh *stanja*) stroja, te da se u tim konfiguracijama ili stanjima stroja ponaša na odgovarajući način.

Smisao nije u tome da se doista izradi neki *Turingov stroj*^{*} – naposljetku, to je tek matematička apstrakcija[†]. Tu je važno da je na temelju Turingove analize pojma izračunavanja moguće zaključiti da se sve što je izračunljivo bilo kojim algoritamskim postupkom može izračunati Turingovim strojem. Ako, dakle, možemo dokazati da se određeni zadatak ne može izvršiti Turingovim strojem, smijemo zaključiti da taj zadatak ne može obaviti nijedan algoritamski postupak. Turing je tako pokazao da za Entscheidungsproblem ne postoji algoritam. Uz to, pokazao je i kako napraviti jedan Turingov stroj koji sâm za sebe može učiniti sve mogu napraviti svi drugi Turingovi strojevi – matematički model svenamjenskog računala.

Turingovi strojevi u pogonu

Turingova analiza pristupa izračunavanja dovela je do zaključka da se bilo koji račun može izvesti nekom od vrlo jednostavnijh naprava koje danas nazivamo Turingovim strojevima. Vrijedi raz-

^{*}Naravno, Turing ih nije zvao Turingovi strojevi; njegov naziv bio je *a*-stroj – ovo “*a*” stajalo je za “automatski”.

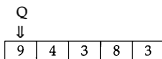
[†]tj. matematičko-logička funkcija – op. ur.

motriti nekoliko jednostavnih primjera. Što je potrebno da se za pojedini Turingov stroj? Za početak, treba nam popis svih mogućih stanja stroja. Zatim, za svako od tih stanja i za svaki simbol koji se može naći na traci, nužno je odrediti koji će postupak stroj izvršiti kad se u tom stanju stroja suoči s tim simbolom. Taj postupak, prisjetimo se, sastojat će se jednostavno od moguće promjene simbola na očitanoj kvadratu, pomaka za jedan kvadrat ulijevo ili udesno, i moguće promjene stanja stroja. Ako velikim slovima obilježimo različita stanja stroja, iskaz:

Kad stroj u stanju stroja R očitava simbol na traci a, zamijenit će simbol a simbolom b, pomaknuti se jedan kvadrat udesno i zatim se prebaciti u stanje stroja S.

možemo simbolički izraziti formulom $R a : b \rightarrow S$. Analogni iskaz koji određuje pomak za jedan kvadrat ulijevo simbolizirat će se slično, kao $R a : b \leftarrow S$. Konačno, iskaz kojim se određuje zamjena simbola na traci bez pomaka po traci simbolizirat će se kao $R a : b \star S$. Te se formule obično nazivaju *petorke* jer sadrže pet simbola (ne računajući dvotočku). Svaki pojedini Turingov stroj može se, dakle, navesti popisom takvih petorki.

Da vidimo kako sastaviti Turingov stroj koji ispituje je li zadani prirodni broj paran ili neparan. Zadani broj zapisat ćemo u uobičajenoj (decimalnoj) notaciji kao niz brojk 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Naravno, kad se tako napiše, na prvi pogled se lako vidi je li broj paran ili neparan. Samo pogledajte prvu brojku *zdesna*: ako je 1, 3, 5, 7 ili 9, broj je neparan, u svim ostalim slučajevima je paran. No, mi ćemo napraviti takav stroj koji počinje očitavanje prve brojke *slijeva*. Budući da Turingov stroj može raditi samo s jednom po jednom brojkom istovremeno, a pomiče se samo jedan po jedan kvadrat istovremeno, nije sasvim očito kako to izvesti. "Ulazni" broj zapisan je na traci ovako:

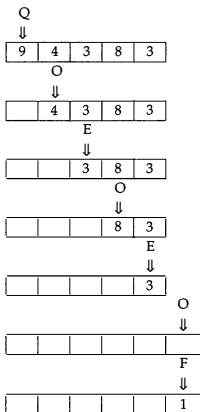


Na traci je, dakle, napisan broj 94383, a stroj je u početnom stanju Q u kojemu ispituje krajnji lijevi kvadrat. Iako je prikazana traka sa samo pet kvadrata (upravo dovoljno da bismo obuhvatili ulazni broj), bitno je da nema ograničenja količine trake koja je na raspolaganju za računanje. Zato će se, ako se stroj pokuša pomaknuti s desnog kraja trake, uvijek pojavljivati prazan kvadrat. Prazno mjesto se računa kao poseban znak koji pišemo kao $\square$.

Naš Turingov stroj će uvijek početi u stanju Q i očitavat će prvi kvadrat slijeva. Koji god broj odaberemo kao ulazni, na kraju ćemo završiti s trakom koja je prazna, osim što ima jedan ispunjen kvadrat. U tom kvadratu bit će 0 ako je ulazni broj paran, a 1 ako je neparan. Stroj će imati četiri stanja, simbolički Q, E, O i F. Kao što smo već naveli, Q je početno stanje. U kojem god stanju stroj bio, ako ispituje parnu znamenku on će je izbrisati (to jest tiskati će prazninu preko nje), pomaknuti se za jedan kvadrat u desno i prijeći na stanje O. Na kraju će sve ispitati, izbrisati sve ulaze i doći do praznog kvadrata. U tom će trenutku tiskati 0 ako je došao u stanje E, a 1 ako je došao u stanje O. Zatim će se pomaknuti jedan kvadrat ulijevo i stati. Evo skupa petorki od kojih se sastoji naš stroj:

Q 0 : $\square \rightarrow E$	Q 2 : $\square \rightarrow E$	Q 4 : $\square \rightarrow E$	Q 6 : $\square \rightarrow E$	Q 8 : $\square \rightarrow E$
Q 1 : $\square \rightarrow O$	Q 3 : $\square \rightarrow O$	Q 5 : $\square \rightarrow O$	Q 7 : $\square \rightarrow O$	Q 9 : $\square \rightarrow O$
E 0 : $\square \rightarrow E$	E 2 : $\square \rightarrow E$	E 4 : $\square \rightarrow E$	E 6 : $\square \rightarrow E$	E 8 : $\square \rightarrow E$
E 1 : $\square \rightarrow O$	E 3 : $\square \rightarrow O$	E 5 : $\square \rightarrow O$	E 7 : $\square \rightarrow O$	E 9 : $\square \rightarrow O$
O 0 : $\square \rightarrow E$	O 2 : $\square \rightarrow E$	O 4 : $\square \rightarrow E$	O 6 : $\square \rightarrow E$	O 8 : $\square \rightarrow E$
O 1 : $\square \rightarrow O$	O 3 : $\square \rightarrow O$	O 5 : $\square \rightarrow O$	O 7 : $\square \rightarrow O$	O 9 : $\square \rightarrow O$
E $\square$: 0 ★ F	O $\square$: 1 ★ F			

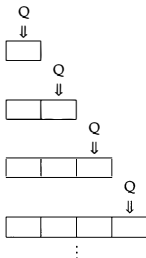
Potpun izračun na primjeru ulaza 94383 detaljno prikazuje rad stroja:



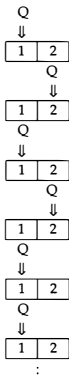
Stroj počinje u stanju Q i ispituje brojku 9. Odgovarajuća petorka nalazi se u drugom redu posljednjeg stupca liste. Ta petorka uzrokuje da stroj izbriše 9 i pomakne se za jedno mjesto udesno te uđe u stanje O. U stanju O primjenjuje se petorka u petom redu trećeg stupca, a ispituje se 4. U skladu s tim stroj briše 4, pomiče se udesno i ulazi u stanje E. Zatim se u stanju E ispituje 3. Petorka u petom redu drugog stupca briše 3 i stroj ide udesno te ulazi u stanje O. U stanju O ispituje 8, u igru ulazi peti red posljednjeg

stupca koji briše 8, pomiče se desno i ulazi u stanje E. Još jedanput u stanju E ispituje se 3, primjenom četvrtog reda drugog stupca. Briše se 3, stroj se pomiče desno te ulazi u stanje O. U stanju O ispituje prazan kvadrat, a primjenjuje posljednji red drugog stupca. Prazninu zamjenjuje 1, stroj ostaje na mjestu i ulazi u stanje F. U stanju F nailazi na prazninu. Tu nema petorke koju bi mogao primijeniti i stroj se zaustavlja. Na kraju računanja na traci ostaje samo znamenka 1, što je ispravno jer je ulazni broj bio neparan.

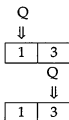
Za razliku od fizičkih naprava, Turingovi strojevi su puke matematičke apstrakcije i nisu ograničeni količinom trake. Ako počne od prazne trake, Turingov stroj koji se sastoji od samo jedne petorke $Q \square : \square \rightarrow Q$ će se samo nastaviti "zauvijek" kretati udesno:



Računanje Turingovog stroja može se nastaviti bez prestanka, čak i kada pređe samo neku određenu količinu trake. Pogledajmo, na primjer, Turingov stroj koji se sastoji od svega dvije petorke $Q 1 : 1 \rightarrow Q$ i $Q 2 : 2 \leftarrow Q$. S ulaznim brojem 12 taj će stroj skakati naprijed-natrag, ovako:



Ponašanje stroja u potpunosti ovisi o ulaznom broju. Ako je on na primjer 13, postupak izračunavanja istog stroja bit će ovakav:



U stanju Q ispituje 3. Tu se ne može primijeniti ni jedna petorka i stroj se zaustavlja.

Dakle, neki Turingovi strojevi uz neke ulazne brojeve na koncu se zaustavljaju, a neki ne. Primjenom Cantorove dijagonalne metode na ovu situaciju, Turing je došao do problema koje nisu mogli riješiti Turingovi strojevi, a to ga je dovelo do zaključka o nerješivosti Entscheidungsproblema.

Turing primjenjuje Cantorovu dijagonalnu metodu

Vrhunac kolegija Maxa Newmana bio je Gödelov teorem o nepotpunosti i upravo je on skrenuo pažnju Alana Turinga na Entscheidungsproblem. Stoga je bilo prirodno da se Turing, zamišljajući prikaz svojih strojeva kao niz petorki, sjeti upotrijebiti prirodne brojeve kao kodove za te strojeve i iskoristiti Cantorovu dijagonalnu metodu. Slijedit ćemo Turingov način razmišljanja i uspostaviti kôd sličan, ali ne potpuno isti kao onaj koji je on koristio.

Kako bismo podesili našu shemu kodiranja, zamislit ćemo petorke koje čine Turingov stroj napisane jednu iza druge, odvojene znakom točka-zarez. Tako ćemo Turingov stroj koji se sastoji od para petorki:

$$Q1:1 \rightarrow Q \quad Q2:2 \leftarrow Q$$

zapisati kao: $Q1:1 \rightarrow Q; Q2:2 \leftarrow Q$. Zatim ćemo zamijeniti svaki simbol nizom decimalnih znamenki prema sljedećim pravilima:

- Kao simbole na traci koristit ćemo samo nizove koji počinju i završavaju s 8, a između imaju isključivo znamenke 0, 1, 2, 3, 4 i 5. Donja tablica pokazuje kako ćemo prikazivati decimalne znamenke i $\square$ (kao simbole na traci) te ovih pet simbola: $\rightarrow \leftarrow \star : ;$

simbol	prikaz	simbol	prikaz
0	8008	□	8558
1	8018	→	616
2	8028	←	626
3	8038	★	636
4	8048	:	646
5	8058	;	77
6	8518		
7	8528		
8	8538		
9	8548		

- Za stanja ćemo koristiti samo nizove koji počinju i završavaju s 9, a između imaju isključivo brojeve 0, 1, 2, 3, 4 i 5. Početno stanje Q prikazat ćemo nizom 99.

Dakle, dvije petorke na koje je upravo ukazao Turingov stroj, bile bi kodirane brojem: 998018 646 8018 616 99 77 998028 646 8028 626 99. Za Turingov stroj koji smo napravili za razlikovanje parnih od neparnih brojeva, stanja E, O, F možemo kodirati kao 919, 929 i 939. Dakle, kodni broj za čitav stroj bio bi:

9980086468558616919 77 9980286468558616919 77 9980486468558616919 77
 9985186468558616919 77 9985386468558616919 77 9980186468558616929 77
 9980386468558616929 77 9980586468558616929 77 9985286468558616929 77
 9985486468558616929 77 91980086468558616919 77 91980286468558616919 77
 91980486468558616919 77 91985186468558616919 77 91985386468558616919 77
 91980186468558616929 77 91980386468558616929 77 91980586468558616929 77
 91985286468558616929 77 91985486468558616929 77 92980086468558616919 77
 92980286468558616919 77 92980486468558616919 77 92985186468558616919 77
 92985386468558616919 77 92980186468558616929 77 92980386468558616929 77
 92980586468558616929 77 92985286468558616929 77 92985486468558616929 77
 91985586468008636939 77 92985586468018636939

Iako je ovo samo jedan veliki broj, on je prikazan s prazninama upravo zato bi se vidjeli kodovi za pojedine petorke. Očigledno, iz koda je lako opet dobiti petorke. Prvo treba pronaći 77 koji odvaja kodove pojedinih petorki, a zatim dekodirati svaku pojedinu petorku. Na primjer, kôd 92985386468558616919 rastavlja se u kôd 929 8538 646 8558 616 919, što dekodiramo kao $O\ 8 : \square \rightarrow E$. Naravno da je kodiranje moglo biti podešeno na različite načine, ali ovaj program ima važno i korisno svojstvo transparentne dekodabilnosti.*

Kao i u gornjim primjerima, za svaki Turingov stroj možemo smatrati da na početku ispituje najljepiju znamenku napisanu na traci. Za neke brojeve stroj će naposljetku stati, dok za neke može zauvijek nastaviti raditi. Nazovimo sada skup onih prirodnih brojeva koji spadaju u prvu od navedenih kategorija *stajni skup* tog Turingovog stroja. *Ako zamislimo da stajni skup Turingovog stroja čini "paket" a kodni broj kao oznaku tog paketa, onda imamo tipičan raspored za primjenu dijagonalne metode: označeni paketi u kojima su oznake baš ono što se nalazi u paketu – u ovom slučaju to su prirodni brojevi.*[†] Dijagonalna metoda će nam omogućiti stvaranje skupa prirodnih brojeva koji ćemo nazvati D , a koji je različit od bilo kojeg skupa brojeva za koje će Turingov stroj stati. Evo kako je to moguće: D će se sastojati isključivo od kodnog broja Turingovih strojeva. Kodni broj svakog Turingovog stroja pripadat će skupu D ako i samo ako ne pripada stajnom skupu za taj stroj. Dakle, ako kodni broj određenog Turin-

*Treba primijetiti da taj program kodiranja na traci omogućuje simbole koji nisu samo decimalne znamenke i $\square$, već i simbole kodirane takvim nizovima kao što je 81118. To pak omogućuje simbole koji se mogu koristiti za označavanje određenih kvadrata na traci, pa ih je moguće ponovno pronaći. Moguće je također dokazati da korištenje takvih dodatnih simbola ne povećava računalnu moć Turingovih strojeva i da korištenje decimalnog sustava ne utječe na ono što mogu izvesti Turingovi strojevi. Vidi [Dav-Sig-Wey] (u Bibliografiji), str. 113–68.

[†]Kratki podsjetnik naći ćete na str. 93–96.

govog stroja pripada stajnom skupu za taj stroj, onda taj kodni broj ne pripada skupu D . Ako pak taj kodni broj ne pripada stajnom skupu za taj stroj, onda pripada skupu D . Ni u kojem slučaju D ne može biti isti skup brojeva kao i stajni skup dotičnog stroja. Budući da to vrijedi za svaki Turingov stroj, možemo zaključiti da **skup D nije stajni skup nijednog Turingovog stroja.**

Samo malo! Jedna tvrdoglava osoba još je uvijek sumnjičava. Uključujemo se u razgovor između tvrdoglave osobe (to) i sveznajućeg autora (sa):

to: Nisam baš shvatio to razmišljanje, ali znam da mogu načiniti Turingov stroj čiji stajni skup je skup D . Zapravo, evo tog stroja.

sa: Ah, vidim. Biste li, molim vas, izračunali kodni broj svoga stroja?

to: Vrlo rado! Samo malo. Broj je 998038646855861692977... 7792985286468558616929 (pokazuje neki ogromni broj).

sa: U redu. Spada li taj broj u stajni skup vašeg stroja?

to: Čekajte! Moram to riješiti. Ne. Ne. Nije u stajnom skupu za moj stroj.

sa: E, sad poslušajte. Ako taj broj nije u stajnom skupu za vaš stroj, onda iz načina na koji je definiran skup D , taj broj mora biti član skupa D . Budući da je taj broj član skupa D , a nije u stajnom skupu za vaš stroj, ta dva skupa moraju biti različita.

to: Samo da provjerim račun. O da, shvaćam. Napravio sam malu grešku. Baš sam budalast. Taj broj zapravo jest član stajnog skupa za moj stroj. Ispričavam se zbog svoje smiješne greške.

sa: Samo polako! Iz načina na koji je definiran skup D , ako je kodni broj vašeg stroja član njegovog stajnog skupa, onda on sigurno nije član skupa D . Dakle, ta dva skupa moraju biti različita.

ro: To što govorite je vrlo uvjerljivo. No, kad bih se složio s tim da ste uspjeli dokazati svoje mišljenje, više ne bih bio tvrdoglava osoba.

Nerješivi problemi

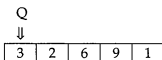
Skup prirodnih brojeva D definiran je kao različit od skupa onih brojeva za koje bi se bilo koji Turingov stroj zaustavio. No, kakve to ima veze s Entscheidungsproblemom? Veza je u razlogu zbog kojeg je Hilbert taj problem nazvao *temeljnim problemom matematičke logike*. Hilbert je shvatio da bi rješenje Entscheidungsproblema omogućilo algoritam za rješavanje svih matematičkih problema. Upravo je to shvaćanje bilo u pozadini Hardyjeva čvrstog uvjerenja o tome da se za Entscheidungsproblem nikada neće naći rješenje. Ako uzmemo da je tomu tako, to nadalje znači da, ako postoji primjer matematičkog problema za koji možemo pokazati da je algoritamski nerješiv, onda je nerješiv i Entscheidungsproblem. Skup D predstavlja takav primjer.

Razmotrimo sljedeći problem:

Pronađi algoritam kojim se za dani prirodni broj određuje pripada li skupu D .

To je naš primjer nerješivog problema. Prvi korak u shvaćanju da ne postoji takav algoritam je primijetiti da, prema Turingovoj analizi procesa računanja, ako postoji takav algoritam onda postoji i Turingov stroj koji bi mogao postići isti rezultat. Baš kao i kod Turingovog stroja načinjenog za razlikovanje parnih od neparnih

brojeva, možemo zamisliti stroj koji počinje ispitivati najljeviju znamenku zadanog broja u početnom stanju Q , na sljedeći način:



Slično, željeli bismo da stroj na koncu stane i da traka sadrži samo jednu znamenku: 1 ako ulazni broj pripada skupu D , 0 ako mu ne pripada. Konačno, željeli bismo da se zaustavi u stanju F , čije je svojstvo da nijedna petorka stroja ne počinje slovom F *. Na primjer,



Zamislimo sada da dodajemo još dvije petorke našem Turingovu stroju:

$$F0 : \square F \quad \text{ i } \quad F\square : \square \rightarrow F$$

S ulaznim brojem koji pripada skupu D , novi stroj će se ponašati jednako kao i prije i na kraju će se zaustaviti s brojem 1 na traci. No, s ulaznim brojem koji ne pripada skupu D , ovaj stroj će se zauvijek kretati udesno. Dakle, skup brojeva za koje će se ovaj novi zamišljeni stroj zaustavljati je sâm skup D . Pa ipak, to nije moguće zato što je D konstruiran dijagonalnom metodom, kako bi bio

*Treba naglasiti da, kad bi zalsta postojao algoritam za razlikovanje predmeta koji su članovi skupa D od onih koji to nisu, onda ne bi bilo potrebe za ovakvim namještanjem ulaza i izlaza. Konačno, ne bi bilo problema ni kad bismo predali ulazni broj ljudskom biću koje bi izvršilo pretpostavljeni algoritam u tom obliku, niti kad bismo izlazni broj u željenom obliku stavili na traku.

različit od skupova za koje bi se bilo koji Turingov stroj zaustavio. Stoga je naša pretpostavka, da postoji algoritam za razlikovanje predmeta koji su članovi D od onih predmeta koji to nisu, izvjesno bila pogrešna. Ne postoji takav algoritam! Problem algoritamskog razlikovanja predmeta koji su članovi skupa D i onih predmeta koji to nisu je nerješiv!

Kao što smo vidjeli, i Hilbert i Hardy su vjerovali da bi algoritamsko rješenje Entscheidungsproblema značilo da se svaki matematički problem može riješiti pomoću algoritma. Dakle, ako imamo matematički problem koji je algoritamski nerješiv iz toga slijedi da je i Entscheidungsproblem nerješiv. Da bismo vidjeli kako uspostaviti vezu sa skupom D , sa svakim prirodnim brojem n povezat ćemo sljedeće predložene premise i konkluziju:

Premisa n je kodni broj nekog Turingovog stroja i isti broj n je stavljen na njegovu traku, a ispituje se prva brojka slijeva.

Konkluzija Turingov stroj koji je započeo raditi na taj način, na kraju će se zaustaviti.

Pomoću jezika logike prvog reda, obje rečenice mogu se prevesti u logičku notaciju. Zatim je moguće dokazati da se pomoću Fregeovih pravila može dobiti konkluzija iz premisa, ako i samo ako će se dotični Turingov stroj naposljetku zaista i zaustaviti kad započne raditi s vlastitim kodnim brojem na traci. To je istina ako i samo ako n ne pripada skupu D . Dakle, kad bismo posjedovali algoritam za Entscheidungsproblem, mogli bismo ga koristiti za utvrđivanje pripadnosti skupu D . Naime, ako imamo prirodni broj n , možemo koristiti naš pretpostavljeni algoritam za Entscheidungsproblem da provjerimo slijedi li konkluzija iz premisa. Ako slijedi, znat ćemo da n ne pripada skupu D , a ako ne slijedi znat ćemo da n pripada skupu D . Iz toga slijedi da je Entscheidungsproblem algoritamski nerješiv.¹²

Turingov univerzalni stroj

U Turingovom postupku ima nešto uznemirujuće. Njime je dokazano da se nijednim Turingovim strojem ne može riješiti Entscheidungsproblem. No, da bi došao do zaključka da ne postoji algoritam za Entscheidungsproblem, Turing se upustio u raspravu o onome što se događa kad računanje obavlja ljudsko biće. Koliko je uvjerljiv njegov argument da svaki takav izračun može izvesti i Turingov stroj? Da bi podupro svoj argument, Turing je dokazao da se na stroju mogu izvoditi različiti matematički izračuni.* No, najhrabrija i najdalekosežnija ideja na koju je došao da bi ispitao valjanost onoga što je učinio, bio je univerzalni stroj.

Zamislimo dva prirodna broja zapisana na traci Turingova stroja (u uobičajenoj decimalnoj notaciji), odvojena praznim kvadratom. Prvi broj neka bude kodni broj nekog Turingovog stroja, a drugi broj neka bude ulazni broj za taj stroj:

kodni broj Turingovog stroja M		ulaz u M
--	--	------------------------------

Zamislimo sada osobu koja ima zadatak izvesti ono što bi učinio Turingov stroj čiji kodni broj je prvi broj na traci kad bi mu ulazni broj bio drugi broj na traci. Zadatak je jednostavan. Može početi s petorkama koje koje tvore stroj čiji kod je prvi broj na traci. Nakon toga samo treba raditi na traci sve što petorke nalažu. Turingovom analizom htjelo se pokazati da je bilo koji jednostavan računski zadatak izvediv uz pomoć Turingova stroja. Primjenjujući tu ideju na postojeći zadatak, možemo zamisliti Turingov stroj s kodnim broja Turingova stroja M kao početnim brojem na traci, za kojim slijedi

*Na primjer, Turing je pokazao kako napraviti strojeve koji bi mogli proizvoditi nizove nula i jedinica koje predstavljaju binarne prikaze realnih brojeva e i π . To je napravio i za druge realne brojeve koji su se pojavljivali u standardnoj matematici: korijene polinomskih jednadžbi s cijelim koeficijentima, čak i za realne nule Besselovih funkcija.

neki ulazni broj, napravio isto što bi napravio i stroj $\mathcal{M}$ s istim ulaznim brojem. *To bi bio jedan jedini Turingov stroj koji bi potpuno samostalno mogao izvesti sve što bi mogao izvesti i bilo koji drugi Turingov stroj.* Turing je ovaj izvanredan zaključak ispitao tako što je odlučio pokazati kako zaista napraviti petorke jednog takvog univerzalnog stroja. To mu je sjajno pošlo za rukom u nekoliko stranica onoga što bismo danas nazvali kompjutorskim programom!¹³

Ljudi su o računalnim strojevima razmišljali još od Leibnizova doba, pa i ranije. Prije Turinga opća je pretpostavka bila da su u služenju takvim strojevima tri kategorije, stroj, program i podaci, potpuno odvojene. Stroj je bio jedan fizički predmet; danas bismo ga zvali hardver. Program je bio plan za računanje, možda realiziran u bušenim karticama ili kabelima povezanim u utikačku ploču. Konačno, podaci su bili brojčani ulaz. Turingov univerzalni stroj je pokazao da je odvojenost ovih triju kategorija zapravo iluzija. Turingov stroj je izvorno zamišljen kao stroj s mehaničkim dijelovima, odnosno kao *hardver*. Ali, njegov kôd na traci univerzalnog stroja funkcionira kao *program* i daje detaljne upute koje su univerzalnom stroju potrebne da bi obavio odgovarajući izračun. Konačno, univerzalni stroj, u operacijama koje se izvode korak po korak, znamenke strojnog koda vidi samo kao nove *podatke* na kojima mora raditi. Ovo prožimanje tih triju pojmova temelj je rada u suvremenom računarstvu. Program napisan u modernom programskom jeziku za interpretor ili kompilator koji s njime radi predstavlja podatak, i to takav da se upute iz programa doista mogu i izvršiti. Zapravo se sâm Turingov stroj može smatrati interpretorom, budući da on uzastopne petorke tumači tako što izvodi zadatke koje mu one nalažu.

Turingova analiza je omogućila duboke nove uvide u drevno umijeće računanja. Pojam računanja počeo se shvaćati šire od aritmetičkih i algebarskih izračunavanja. U isto vrijeme, pojavila se vizija univerzalnog stroja koji u načelu može izračunati sve što je

uopće moguće računati. Turingovi primjeri pojedinih strojeva već su zapravo primjeri umijeća programiranja, a univerzalni stroj je prvi primjer interpretativnog programa. Univerzalni stroj pruža i model računala s pohranjenim programom u kojem su kodirane petorke na traci zapravo pohranjeni program, pri čemu stroj ne razlikuje program od podataka. Konačno, univerzalni stroj pokazuje kako se hardver u obliku skupa petorki koje se smatraju opisom rada stroja, može zamijeniti softverom koji čine iste petorke u kodiranom obliku pohranjenom na traci univerzalnog stroja.

Dok je radio na dokazu nepostojanja algoritamskog rješenja za *Entscheidungsproblem*, Turing nije mogao ni slutiti kako se do sličnih rješenja dolazilo i s druge strane Atlantika. U Cambridge je stigao jedan broj časopisa *American Journal of Mathematics*, u kojem je bio članak Alonza Churcha sa Sveučilišta Princeton pod naslovom "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory" /*Jedan nerješivi problem elementarne teorije brojeva*/.^{*} Newmann je tada već bio primio prvi nacrt Turingova rada. Church je u svojim radovima pokazao da postoje algoritamski nerješivi problemi. Njegov rad ne spominje strojeve, ali je ukazao na dvije predložene koncepcije za objašnjavanje intuitivnog pojma izračunljivosti ili, kako je to zvao Church, "efektivne izračunljivosti". Te dvije koncepcije su bile *lambda-de finabilnost*, koju su razvili Church i njegov student Stephen Kleene, i *opća rekurzivnost* koju je uveo Gödel (u svojim predavanjima dok je bio u posjetu Institutu za napredna istraživanja u Princetonu u proljeće 1934. godine). Pokazalo se da su ta dva pojma jednaka te je Churchov nerješivi problem doista nerješiv u objema koncepcijama. Iako u tom radu Church nije iz-

^{*}Alonzo Church (1903–1995) je odigrao presudnu ulogu u razvoju logičkih istraživanja u Sjedinjenim Državama. Osnovao je utjecajni časopis *Journal of Symbolic Logic* i bio je njegov urednik više od četrdeset godina. Stephen Kleene (1909–1994), istaknuti američki logičar, bio je jedan od trideset jednog Churchovog doktorskog studenta (jedan od njih sam bio i ja).

vukao zaključak da je Hilbertov Entscheidungsproblem zapravo nerješiv s obzirom na te koncepcije, prvi broj časopisa *Journal of Symbolic Logic* (1936) sadržavao je Churchovu kratku napomenu u kojoj je zaključio upravo to. Turing je brzo dokazao da je njegova koncepcija izračunljivosti jednaka lambda-definibilnosti i odlučio je pokušati provesti neko vrijeme u Princetonu.

Iako se većina onoga što je otkrio Turing zapravo svodila na ponovno otkrivanje onoga što je već učinjeno u Sjedinjenim Državama, njegova analiza pojma izračunavanja i otkriće univerzalnog računalnog stroja bili su potpuno novi.* Kurt Gödel je bio prilično nepovjerljiv prema Churchovim zaključcima, a u njihovu ispravnost konačno ga je uvjerila Turingova analiza.¹⁴

Alan Turing na Princetonu

Iako se u Engleskoj matematičari nisu posebno trudili da dođu do titule doktora znanosti, za Turinga je najpraktičnije bilo svoj ostanak u Princetonu urediti tako da postane postdiplomant, što je status koji zaista ne odgovara njegovim dostignućima. U dvije godine u Princetonu završio je sjajnu doktorsku disertaciju, a mentor mu je bio Alonzo Church. Budući se Gödelov neodlučiv iskaz određenog sustava moglo smatrati istinitim ako ga se promatra izvan sustava, bilo je prirodno dodati taj iskaz danom sustavu kao novi aksiom i tako dobiti novi sustav u kojem taj neodlučivi iskaz nije više neodlučiv. Ako primijenimo Gödelove metode, jasno je da će se smatrati da novi sustav sadrži vlastite neodlučive iskaze. U svojoj je disertaciji Turing proučavao hijerarhije sustava koji su dobiveni neprestanim ponavljanjem takvog postupka.

*Isti prvi svezak časopisa *Journal of Symbolic Logic* u kojem se pojavio Churchov problem nerješivosti Entscheidungsproblema, sadržavao je i kratak rad američkog logičara E. L. Posta koji je formulirao koncepciju prilično blisku Turingovoj. ([Davis 1], str. 289–91). Post mi je bio profesor dok sam studirao na City Collegeu u New Yorku.

Ta disertacija je uvela i pojam Turingova stroja koji je mogao prekinuti računanje da bi tražio informacije izvana. Uz pomoć takvih strojeva možemo govoriti o jednom nerješivom problemu iz para problema koji je još "manje rješiv" od drugog problema iz para. Općenito govoreći, ideje navedene u ovom radu bile su temelj za radove niza istraživača.¹⁵

Godine 1936. (zapravo i kroz čitave pedesete) Odsjek za matematiku u Princetonu bio je smješten u Fine Hallu, niskoj zgradi izgrađenoj od lijepe crvene cigle.* U to vrijeme u Fine Hallu nije bio samo Matematički fakultet Sveučilišta u Princetonu, već su u njemu bili i matematičari koji su bili dio nedavno osnovanog Instituta za napredna istraživanja, a već je bio počeo veliki priliv znanstvenika koji su bježali od nacističkog režima u Sjedinjene Države. Koncentracija matematičkog talenta u Princetonu tridesetih godina počela je konkurirati, a zatim je i nadmašila onu u Göttingenu. Među onima koje se moglo vidjeti u hodnicima Fine Halla bili su Hermann Weyl, Albert Einstein i John von Neumann. Von Neumannovi su se interesi jako udaljili od rada na Hilbertovu programu temelja matematike.

Prve godine Turing se morao snalaziti s oskudnom stipendijom koju mu je dao Cambridge, dostatnom za Cambridge jer su mu tamo stan i hrana bili osigurani. No, na drugoj godini osjećao se bogat jer mu je dodijeljena ugledna Proctorova stipendija. Među pismima preporuke napisanim u znak podrške njegovoj prijavi za tu stipendiju, bilo je i ovo:

1. lipnja 1937.

Štovani,

Gospodin A. M. Turing me obavijestio da će se prijaviti za Proctorovu stipendiju [sic] radi gostovanja na Sveučilištu Prince-

*Zgrada u kojoj je danas smješten Odsjek za matematiku na Princetonu također se zove Fine Hall. To je masivan toranj kojeg se može vidjeti s autoceste, iz daljine od oko kilometar i pol.

ton sa Sveučilišta u Cambridgeu u akademskoj godini 1937/38. Želim podržati njegovu prijavu i obavijestiti Vas da vrlo dobro poznajem g. Turinga iz prijašnjih godina. U zadnjem semestru 1935. bio sam gostujući profesor u Cambridgeu. Tijekom godine 1936/37, koju je g. Turing proveo u Princetonu, imao sam prilike promatrati njegov znanstveni rad. *Dobro je radio u onim granama matematike za koje sam i sâm zainteresiran, a to su teorija gotovo periodičkih funkcija i teorija neprekidnih grupa.* [kurziv dodan]

Mislim da on zaslužuje Proctorovu stipendiju i bit će mi drago ako budete u mogućnosti dodijeliti mu je.

Srdačan pozdrav,
John von Neumann¹⁶

Znamo li da se von Neumann dosta bavio Hilbertovim programom temelja matematike, u ovom pismu iznenađuje da nije spomenut Turingov rad na izračunljivosti i njegov dokaz o nerješivosti Entscheidungsproblema. Teško je povjerovati da von Neumann nije znao za te radove. Mislim da je ključ u riječima "u granama matematike za koje sam i sâm zainteresiran". Von Neumann, jedan od najvećih matematičara stoljeća, koji je doslovno gutao knjige i koji je imao gotovo fotografsko pamćenje, očito je, nakon što je Gödel pokazao da je većina njegovih radova iz tog područja beskorisna, odlučio da ne želi više imati posla s logikom. Navodno je kazao da nakon onoga što je Gödel napravio 1931, nikada više nije pročitao niti jedan rad iz logike.¹⁷ To pitanje nije nevažno zbog uloge Turingova rada u von Neumannovim razmišljanjima o računalima u periodu nakon Drugog svjetskog rata.

Dokaz o tome donekle pruža pismo von Neumannova prijatelja i suradnika Stanislaw Ulama, koje je napisao njegovu biografu Andrewu Hodgesu.* U njemu se spominje igra koju je von Ne-

*Stanislaw Ulam (1909–1984) je bio vodeći matematičar čiste i primijenjene matematike. Radio je u mnogim granama matematike, a bio je i von Neumannov dobar prijatelj. Jedna njegova ideja je na koncu dovela do važnog

umann predložio u ljetu 1938. godine, kad su on i Ulam zajedno putovali Evropom. Igra se sastojala od "pisanja najvećeg broja koji osoba može napisati, a da ga definira metodom koja ima neke veze s Turingovim nacrtima". U Ulamovom pismu se navodi i da "mu je von Neumann 1939. godine nekoliko puta spomenuo Turingovo ime u razgovorima o mehaničkim načinima za stvaranje formalnih matematičkih sustava". Ulamovo pismo jasno pokazuje da bez obzira na ono što je bilo prije, von Neumann je do početka Drugog svjetskog rata u rujnu 1939. bio dobro upoznat s Turingovim radom o izračunljivosti.¹⁷

Turingov univerzalni stroj bio je koncepcijski sjajna naprava koja je potpuno samostalno mogla izvršiti bilo koji algoritamski zadatak. No, je li nešto takvo zaista moguće i napraviti? Na stranu ono što bi takav stroj mogao postići u teoriji, može li on biti dizajniran i konstruiran tako da riješi probleme stvarnog svijeta u prihvatljivim vremenskim okvirima i uz raspoloživa sredstva? Ta su pitanja mučila Turinga od samog početka. U nekrologu londonskog *The Timesa*, Turingov učitelj Max Newman je napisao:

Opis "univerzalnog" računalnog stroja tada je bio dao u posve teorijske svrhe. No, kako je Turing bio jako zainteresiran za sve vrste praktičnog eksperimentiranja, već se tada zanimao za mogućnost stvarnog konstruiranja stroja po tim načelima.¹⁹

Nije se ograničio na puko razmišljanje o toj mogućnosti. Kako bi se upoznao s raspoloživom tehnologijom, Turing se potrudio stvarno i izraditi stroj, pritom se posluživši elektromehaničkim relajima koji su množili brojeve napisane u binarnoj notaciji. U tu svrhu dobio je pristup studentskoj radionici Odsjeka za fiziku,

načina za proširenje uobičajenih aksioma teorije skupova, na način koji je bacio novo svjetlo na Gödelov rad na hipotezi o kontinuumu. Ulamovo najznačajnije otkriće neće pozdraviti svi: on je, naime, dao temeljni nacrt za fizijsko-fuzijsko termonuklearno oružje.

gdje je konstruirao različite dijelove naprave. Sve potrebne releje izradio je sam.*

Rat Alana Turinga

Turing se vratio u Cambridge u ljetu 1938. godine. Iako rat nije bio počeo još cijelu godinu, Turing je bio regrutiran kako bi pridonio pokušajima probijanja kodova korištenih u vojnoj komunikaciji Njemačke. Kodovi i dekodiranje imali su svoje mjesto i u Turingovim i Gödelovim radovima, ali ti su se kodovi birali tako da budu jasni, za razliku od onih koje su upotrebljavali Nijemci koji su namjerno bili neprobojni.

U skladu s paktom između nacističke Njemačke i komunističke Rusije koji je iznenadio svijet, njemačke su trupe 1. rujna 1939. napale Poljsku. Poštujući svoju obavezu, Engleska i Francuska su objavile rat Njemačkoj nekoliko dana kasnije, a četvrtog rujna Turing se prijavio u Bletchley Park. To je bilo viktorijansko imanje sjeverno od Londona gdje se okupila mala ekipa, većinom sveučilišnih nastavnika, koja je odlučila pročitati poruke koje je im je neprijatelj mislio zatajiti. Toj grupici nije bilo suđeno da ostane malena i do kraja rata imanje je udomilo otprilike dvanaest tisuća ljudi koji su radili na različitim aspektima dešifriranja i analize poruka. Uz starije osoblje i naravno vojsku, tamo je bio i značajan broj "wrena", žena koje su se prijavile u vojsku za pomoć mornarici, a umjesto toga su radile na strojevima koje su izmislili Turing i njegove kolege.

Njemačke vojne veze koristile su modificiran komercijalni stroj za šifriranje zvan Enigma. Taj je stroj imao abecednu tipkovnicu, a po pritisku tipke za određeno slovo ono bi se pojavilo u prozorčiću

*Radionica je bila prikladno smještena u Palmerovu laboratoriju za fiziku, smještena vrata do vrata s matematičkom zgradom Fine Halla – postoji čak i prolaz koji povezuje te dvije zgrade.

u šifriranoj verziji. Nakon što je čitava poruka šifrirana, poslana je običnim radio telegrafom. Primaoc bi unio šifrirana slova u drugu Enigmu i pojavila bi se originalna poruka. U stroju je bilo nekoliko rotirajućih kotačića koji su slovo po slovo pridruživali slova ulazne poruke i njezine šifrirane verzije. U vojnoj verziji stroja sigurnost je pojačana dodatnom pločom. Svakog dana stroj bi bio drugačije početno podešen, jednako kod pošiljatelja kao i kod primatelja.

Grupa poljskih matematičara je izvanredno dešifrirala njemačke Enigma poruke prije početka rata, ali kad su Njemački strojevi postali složeniji za još jedan sloj, više nisu imali uspjeha pa su predali posao Britancima. Kriptoanalitičari u Bletchley Parku su uglavnom bili ljudi koji su voljeli rješavati zagonetke, povremeno bi se upustili u intelektualni aspekt problema na kojima su radili i pritom su se zabavljali. No, sâm posao je bio smrtno ozbiljan. Turing je bio odgovoran za komunikaciju između njemačkih podmornica i njihove baze kod kuće. Te su podmornice uništavale brodove koji su donosili prijeko potrebne isporuke na britansko otočje strahovitom brzinom. Postojala je velika mogućnost da Engleska jednostavno izgadni ako se podmornice ne zaustave. Jedna zaplijenjena knjiga šifri sa zarobljene podmornice, i nepažnja pošiljatelja koji je slučajno odao presudne informacije, pomogli su da se sadržaj Enigme uspješno dešifrira. No, presudnu ulogu je ipak odigrao Turing. On je dao nacrt za stroj (nazvan *Bombe* iz razloga kojeg se nitko ne može sjetiti) koji se pokazao veoma korisnim u korištenju tih informacija za zaključivanje o tome kako je na određeni dan podešena njemačka Enigma. Bombe su sistematski izvodile nizove logičkih zaključivanja koji su iz velikog broja mogućih konfiguracija eliminirali jednu moguću konfiguraciju Enigme za drugom, dok ih nije ostalo svega nekoliko. Zatim su ih obrađivali ručno dok se nije pojavila ona prava.*

*Gordon Welchman, matematičar koji je bio šest godina stariji od Turinga, unio

Turingove Bombe su u nekim aspektima bile zaista sjajne. Samo nekoliko mjeseci nakon što je Turing izradio nacrt, već ih je tucet izrađeno i isporučeno. Iznenađuje činjenica da su radile bez ikakvih preinaka. Doći do konfiguracije podešavanja njemačkog pomorskog stroja Enigma na određeni dan značilo je naći pravu kombinaciju od otprilike 150,000,000,000,000,000 mogućnosti. U prosjeku su Turingove Bombe rješavale ovaj problem za oko tri sata, a jednom prilikom su došle do rješenja za četrnaest minuta.

U Bletchley Parku Turinga su od milja zvali "prof", a njegova je ekscentričnost postala izvorom anegdota. Ljudi su poslije godinama prepričavali njegovu naviku da svoju šalicu za čaj drži privezanu uz radijator. Anegdota iz dana Bletchley Parka, koja možda najviše govori, je ona kad je Turing učio kako pucati iz puške. U mračnim danima 1940. i 1941. godine, kad je Engleskoj prijetila invazija, Churchillova je vlada formirala građansku vojsku Home Guard. Iako zbog važnosti svoga posla nije morao stupiti u Home Guard, Alan Turing je ipak odlučio to učiniti zato da nauči pucati iz puške. Rekruti Home Guarda su morali redovito pohađati vježbe i nakon nekog vremena Turing je zaključio da je to gubitak vremena i prestao je dolaziti. Kad ga je pukovnik Fillingham, kojeg je bio glas da naginje srčanoj kâpi, upozorio, Turing je strpljivo objasnio da se on priključio samo da bi naučio pucati i kako sada kad odlično puca, nema više razloga dolaziti. Pukovnik je rekao: "Ali, ne ovisi o vama hoćete li dolaziti ili ne ... vaša je dužnost kao vojnika dolaziti ... Vi podliježete vojnom pravu." Pukovnik je podsjetio Turinga da je, prilikom prijave, ispunio obrazac u kojem je stajalo pitanje: "Razumijete li da se

je jedno važno poboljšanje u Turingov projekt, koje je uvelike poboljšalo njegov rad. Čitatelji koje zanimaju tehničke pojedinosti dešifriranja Enigme upućuju se na Welchmanov prikaz u [Welchman], kao i na [Hodges]. [Hinsley] sadrži zanimljive opise života u Bletchley Parku za vrijeme rata, koje iznosi nekoliko sudionika pothvata dešifriranja. (Reference u zagradama odnose se na poglavlje Bibliografija.)

novačenjem u Home Guard stavljate pod vojni zakon?" Turing je odgovorio da je zaista odgovorio na to pitanje, no da je odgovor glasio "Ne". Razmislivši o tom pitanju, zaključio je da za njega nije korisno odgovoriti s "da".²⁰

Osim što je zabavna, ova anegdota otkriva kakav je bio Turing. Bio je sklon u velikoj mjeri ignorirati društveni okvir u kojem djeluje većina nas. U svakoj situaciji je tražio najbolji potez. Krenuo bi od ničega, razmislio bi o svemu. Većina ljudi bi, suočena s pitanjem poput onog u prijavnom obrascu za Home Guard, uvidjela da je jedino pozitivan odgovor prihvatljiv. Turing je to pitanje shvatio doslovno i ozbiljno je razmislio o tome koji bi odgovor bio najbolji. Iako je takvo razmišljanje bilo dobro za Turingova znanstvena istraživanja, ono nije bilo tako dobro u njegovim odnosima s ljudima i društvenim institucijama i na kraju je nekoliko godina kasnije dovelo do katastrofe.

Turing se sprijateljio s Joan Clarke, mladom matematičarkom koja je bila u službi pothvata Bletchley Park. Zapravo, on se u nju zaljubio, zaprosio ju je i ona je rado prihvatila. Nakon nekoliko dana rekao joj je da ima homoseksualne sklonosti. To je za nju bilo prilično mučno, ali je prihvatila nastaviti zaruke. Nekoliko mjeseci kasnije, ubrzo nakon što su zajedno proveli godišnji odmor, Turing je odlučio da unatoč tome što zaista voli Joan, to jednostavno ne bi išlo i prekinuo je zaruke. Izgleda da je to bio prvi i posljednji put kad je pomišljao na ljubavnu vezu sa ženom.

U međuvremenu, Turing nije prestajao razmišljati o primjenjivosti svoje koncepcije univerzalnog stroja. Pretpostavljao je da upravo taj pojam univerzalnosti skriva tajnu ogromne moći ljudskog mozga i da su, na neki način, naši mozgovi zapravo univerzalni strojevi. Smatrao je da bi, kad bi ga se moglo konstruirati, univerzalni stroj mogao igrati igre poput šaha, moglo bi ga se navesti da uči na način na koji uče djeca i na koncu bi se mogao ponašati na način koji možemo nazvati inteligentnim. Mnogo se

govorilo u tome u Bletchley Parku i Turing je čak skicirao algoritme koje bi stroj mogao koristiti za igranje šaha. U isto vrijeme, dio hardvera potrebnog za izgradnju univerzalnog stroja razvijen je upravo u Bletchley Parku.

Neke poruke koje je Engleska presrela, priopćenja koja su dolazila s najviših nivoa nacističkog režima, nisu bila šifrirana u Enigmi i nisu se prenosila uobičajenom telegrafijom. Britanci su ubrzo shvatili da ona imaju obilježja materijala proizvedenih teleprinterom. To je bio sustav u kojem su pojedinačna slova u tekstu bila prikazana nizom rupa na traci papira. Za razliku od starije Morseove šifrirane telegrafije, ovdje je čovjek bio nepotreban. Izgleda da su Nijemci upotrebljavali jedan jedini stroj koji je mogao istom operacijom i šifrirati i prenositi poruke. Primatelj je imao stroj za dešifriranje. Ovaj se sustav u Bletchley Parku zvao "riba", a Turingov učitelj Max Newman je preuzeo zadatak da ga dešifrira. Neke od metoda koje su se trebale koristiti u šali su nazivane *turingismusi*, što je trebalo ukazivati na njihov izvor. No, turingismusi su zahtijevali obradu mnoštva podataka. Da bi dešifriranje bilo imalo korisno, podaci su morali biti obrađeni vrlo brzo.²¹

Tridesetih godina većina ljudi u Sjedinjenim Državama i Evropi posjedovala je radio prijemnike. Tada, prije izuma tranzistora, radio prijemnici su se sastojali od mnoštva vakuumskih cijevi. Prilikom korištenja one su sjale poput slabih žarulja i postajale su prilično tople. Baš kao i prave žarulje, često bi pregorjele i morale ih se mijenjati. Ako bi nekome prestao raditi radio, mogao je iščupati cijevi iz njihovog naglavka i odnijeti ih u dućan na testiranje. Nakon što se zamijene one koje više nisu dobre, radio bi se obično vratio u život. RCA-ov katalog cijevi na kojem je bio popis stotina različitih modela cijevi s posebnim obilježjima svake cjevčice, bio je prijeko potreban inženjerima i vrlo popularan kod amatera. U ožujku 1943. Alan Turing je plovio kući iz višemjesečnog posjeta Sjedinjenim Državama, gdje je pomogao Amerikancima da poku-

šaju konstruirati Bombe i gdje je preuzeo nadgledanje Enigmine komunikacije s mornaricom. Vrijeme je na putovanju preko Atlantika provodio proučavajući taj RCA-ov katalog, jer se otkrilo da vakuumske cijevi mogu izvoditi zadatke poput zadataka logičke sklopke, a koje su prije izvodili električni releji. Cijevi su bile brze. Njihovi su se elektroni kretali gotovo brzinom svjetlosti, a releji su ovisili o mehaničkom kretanju.

Strujni krugovi vakuumskih cijevi eksperimentalno su se koristili za telefonske sklopke. Turing je stupio u kontakt s je voditeljem istraživanja, nadarenim inženjerom T. Flowersom. Pod vodstvom Flowersa i Newmana, brzo je nastao stroj koji je zapravo bio fizička realizacija turingismusa. Nazvan "Colossus"/Kolos/ i "inženjersko čudo", ovaj stroj je imao 1500 vakuumskih cijevi. Rođena je prva svjetska automatska elektronička računalna naprava. Ne iznenađuje da su izračuni koje je obavljala bila logičke, a ne aritmetičke prirode. Uхваćene njemačke dojave u obliku perforirane papirne trake ubacivane su u stroj pomoću izuzetno brzog čitača trake. Dok se traka kretala kroz čitač, zrake svjetlosti koje su prolazile kroz čitač hvatane su pomoću fotoelektričnih ćelija koje su signal prenosile Colossusu. Bilo je važno da se traka brzo čita da se ne bi usporilo djelovanje strujnih krugova vakuumskih cijevi. Flowersovo izvanredno ostvarenje nije bilo to što je uspio konstruirati stroj za samo nekoliko mjeseci, već to što je stroj koji sadrži toliko puno cijevi uspio dati korisne rezultate. Mnogi su smatrali da će cijevi sigurno mnogo puta zatajiti i da će to onemogućiti rad.

Do kraja rata 1945. godine Turing je posjedovao znanje o radu elektronike vakuumskih cijevi. Uvjeren da se strujni krugovi vakuumskih cijevi mogu koristiti za konstruiranje univerzalnog računala, puno je razmišljao o praktičnim pitanjima implementacije i različitim vrstama primjena takvih strujnih krugova. Da bi ostvario taj projekt, bila mu je potrebna samo odgovarajuća podrška i dovoljno sredstava.

8 Stvaranje prvih univerzalnih računala

Tko je izumio računalu?

Moderno računalo tako je složena mješavina logike i tehnike da bi bilo smiješno izdvojiti samo jednu osobu kao njegova *jedinog* izumitelja. Pa ipak je 1973. godine, dok je rješavao spor oko patenta (*Honeywell protiv Sperry Randa*), jedan sudac umalo da je učinio upravo to. Naša je priča pošla od logičkih ideja koje omogućuju suvremena svenamjenska računala sada stiže do njihove stvarne konstrukcije, raznih tehničkih problema i ljudi koji su uspjeli s njima izaći na kraj. Prikazi povijesti računarstva znatno se razlikuju, i prije nego nastavimo s našom pričom bit će korisno ukratko navesti ljude koji u njoj imaju glavne uloge:

Joseph-Marie Jacquard (1752–1834) Jacquardov tkalački stan je mogao tkati tkaninu s uzorkom prema specifikaciji utisnutoj na gomili bušenih kartica. Revolucionirao je tkalačku praksu prvo u Francuskoj, a na kraju i u cijelom svijetu. Profesionalne tkalje obično kažu, koristeći se donekle razumljivom hiperbolom, da je to bilo prvo računalo. Iako je bio divanizum, Jacquardov tkalački

stan nije bio računalo ništa više nego što je to mehanički klavir. Kao i kod mehaničkog klavira, i ovdje se jednoj mehaničkoj napravi omogućuje da automatski kontrolira prisutnost ili odsutnost ubačenih rupica.

Charles Babbage (1791–1871) Vidi stranicu 163. Babbage je za svoj nikad izrađeni analitički stroj predlagao korištenje bušenih kartica sličnim Jacquardovima. Posjedovao je Jacquardov istkani autoportret.

Ada Lovelace (1815–1852) Njezin otac Lord Byron ju je posljednji puta vidio kad joj je bilo godinu dana. Strastveno je voljela matematiku i bila je oduševljena Babbageovom najavom analitičkog stroja. Na Babbageov poticaj prevela je s francuskog jezika kratku raspravu o analitičkom stroju, kojoj je dodala vlastite bilješke. Prozvali su je prvim računalnim programerom a jedan veliki programski jezik njoj u čast zove se Ada. Često se citira njezin aforizam u kojem povezuje analitički stroj s Jacquardovim tkalačkim stanom:

Možemo s pravom kazati da analitički stroj tka algebarske uzorke, baš kao što Jacquardov tkalački stan tka cvijeće i lišće.¹

Claude Shannon (1916–) U svom magistarskom radu na MIT-u (objavljenom 1938.) Shannon je pokazao kako se algebra logike Georgea Boolea može iskoristiti za nacрте složenih sklopki strujnih krugova. Taj je rad "pomogao da izrađivanje nacрта digitalnih strujnih krugova pređe iz vještine u znanost".² Njegova matematička teorija informacija odigrala je presudnu ulogu u suvremenoj komunikacijskog tehnologiji. Shannonovi radovi su bili početak računalnih algoritama za igranje šaha. Pokazao je kako konstru-

irati univerzalni Turingov stroj sa samo dva stanja. (Shannon mi je bio šef 1953. godine kad sam preko ljeta radio u laboratoriju Bell.)

Howard Aiken (1900–1973) IBM je za Sveučilište Harvard konstruirao njegov *Automatic Sequence Controlled Calculator*. Pritom je koristio električne releje. Stroj je počeo raditi 1944. godine i obavljao je sve zadatke koje je zamislio Babbage. Načinivši stroj koji je imao namjenu služiti za jednu posebnu vrstu dugotrajne obrade podataka koja je bila potrebna fizičarima i inženjerima, Aiken nije uvidio da stroj koji bi trebao biti općenamjenski može biti koristan i za takve izračune. Vidi str. 164.

John Atanasoff (1903–1995) Tijekom godina koje su prethodile ulasku Sjedinjenih Država u Drugi svjetski rat, ovaj skromni fizičar s državnog Sveučilišta Iowa (u suradnji sa svojim asistentom Cliffordom Berryjem) projektirao je i izradio mali kalkulator za posebne namjene koji se bazira na elektronici vakuumskih cijevi. Iako se taj stroj mogao baviti samo posebnom vrstom problema, bio je važan jer je pokazao korisnost strujnih krugova vakuumskih cijevi za računanje.³

John Mauchly (1907–1980) Mauchlyjeva vizija stoji u pozadini razvoja prvog svjetskog elektroničkog računala za dugotrajnu obradu podataka većih razmjera, ENIAC-a na Elektrotehničkom fakultetu Moore Sveučilišta u Pennsylvaniji u Philadelphiji. Mauchly, također fizičar, posjetio je Atanasoffljev laboratorij u Amesu u Iowi gdje je proučavao tamošnji elektronički kalkulator.

J. Presper Eckert ml. (1919–1995) Najveće zasluge za uspješno konstruiranje ENIAC-a pripadaju veličanstvenom radu inženjera elektrotehnike Eckerta.

Herman Goldstine (1913–) Matematičar Herman Goldstine stupio je u vojsku Sjedinjenih Država 1942. godine na mjesto prvog poručnika u balističkom istraživačkom laboratoriju za vojnu artiljeriju. Kao predstavnik vojske na projektu ENIAC, doveo je von Neumanna u grupu s fakulteta Moore. U kasnijim polemikama s Eckertom i Mauchlyjem podržavao je von Neumanna. Nakon rata, postao je glavni von Neumannov suradnik na radovima vezanim za računanje. Njegova knjiga o povijesti računanja [Goldstine] naglašavala je von Neumannovu ulogu i zato je bila kritizirana. (On je bio osoba kojoj sam se trebao prijaviti 1954. godine da dobijem dozvolu za korištenje računala Instituta za napredna istraživanja).

Earl R. Larson (1911–) Tajje američki okružni sudac 1973. godine proglasio nevaljanim patent do kojeg su Eckert i Mauchly došli na ENIAC-u. U njegovom pravorijeku stajala je sljedeća izjava:

Eckert i Mauchly nisu sami izumili automatsko elektroničko digitalno računalo, već su ga izveli iz rada dr. Johna Vincenta Atanasoffa.⁴

John von Neumann i fakultet Moore

Kao što smo vidjeli, John von Neumann je na simpoziju o temeljima matematike u Königsbergu 1930. preuzeo zadatak da objasni Hilbertov program. To je bio isti simpozij na kojemu je Kurt Gödel bacio bombu tvrdeći kako je dokazao da su formalni matematički sustavi nužno nepotpuni, a von Neumann je očito prvi shvatio značaj Gödelova rada. Ubrzo je s priličnim uzbuđenjem pisao Gödelu: "Postigao sam rezultat koji mi se čini značajnim. Uspio sam pokazati da je konzistentnost matematike nedokaziva."

Von Neumann je shvatio kako se pomoću Gödelovih metoda može dokazati da su sustavi poput onoga koji je imao na umu Hilbert nedostatni za dokazivanje vlastite konzistentnosti. Kao što smo već spomenuli (stranica 146), do vremena kad je Gödel primio to pismo i sâm je već bio došao do istog zaključka i poslao je tiskani sažetak koji sadrži taj rezultat.

John von Neumann je bio i sjajan i tašt čovjek koji je bio navikao ostavljati svoj biljeg u području matematike pukom snagom intelekta. Prilično se potrudio oko problema konzistentnosti aritmetike i u svojem izlaganju na simpoziju u Königsbergu čak je i nastupio kao zagovornik Hilbertovog programa. Odmah shvativši duboko značenje Gödelova dostignuća, on ga je i proširio dokazom o nedokazivosti konzistentnosti. Na kraju je shvatio da ga je Gödel preduhitrio. To je bilo previše. Iako se divio Gödelu (čak je i predavao o njegovu radu), von Neumann se zakleo da više nikada neće imati posla s logikom. Priča se da se hvalio da nakon Gödela nije pročitao ni jedan rad o logici. Logika ga je ponizila, a von Neumann nije bio navikao na poniženja. No, nije mogao održati zakletvu i na kraju ga je potreba za snažnim računalnim strojem prisilila da se vrati logici.

Kao što je bio slučaj i kod Turinga, von Neumann je u ratu israživao iznenađujuće velike razmjere. Šifriranje na Bletchley Parku težište je stavljalo na računanje sa simboličkim formama, u skladu s onim što je Turing prije radio. Von Neumannu je pak bila potrebna staromodna i teška dugotrajna obrada podataka. Stoga ne iznenađuje da je zgrabio priliku sudjelovati u uzbudljivom projektu na Elektrotehničkom fakultetu Moore u Philadelphiji, gdje je trebalo konstruirati snažno elektroničko računalo ENIAC. Tridesetogodišnji matematičar Hermann Goldstine doveo je von Neumanna u projekt ENIAC. Prema Goldstineovoj verziji priče, njih dvojica su se prvi puta sreli na željezničkoj stanici u ljetu 1944, a von Neumann se ubrzo pridružio raspravama u Philadelphiji.

Ako je Colossus sa svojih 1500 vakuumskih cijevi bio inženjersko čudo, onda je ENIAC s 18,000 cijevi bio jednostavno izvanredan. Tada se općenito smatralo da ni jedan takav sklop ne može pouzdano raditi, jer će se svakih nekoliko sekundi pokvariti barem jedna cijev. Glavni inženjer ENIAC-a, John Presper Eckert ml. je izuzetno zaslužan za uspjeh projekta jer je upravo on zahtijevao vrlo visoke standarde pouzdanosti komponenti. Cijevi su radile veoma konzervativno podešenom snagom, što je držalo broj kvarova na tri cijevi tjedno. ENIAC je bio ogroman stroj koji je zauzimao cijelu sobu, programirao se tako da su se kablovi spajali na njegovu utikačku ploču, podosta slično staromodnoj telefonskoj centrali. Oblikovan je na tada najuspješnijim računalnim strojevima, diferencijalnim analizatorima.⁵ Diferencijalni analizatori nisu bile digitalne naprave koje rade na brojevima znamenku po znamenku; brojeve su predstavljali mjerljivim fizičkim količinama (poput električnih struja ili napona), a željene matematičke operacije su dobivene povezivanjem među komponentama stroja. Preciznost tih srodnih strojeva bila je ograničena instrumentima koji su korišteni za mjerenja. ENIAC je bila digitalna naprava, prvi elektronički stroj koji je mogao raditi s istom vrstom matematičkih problema kao i diferencijalni analizatori. Njegovi su ga konstruktori izgradili od dijelova koji su funkcionalno slični onima od kojih su načinjeni diferencijalni analizatori, a za veću brzinu i preciznost oslanjali su se na mogućnosti koje pruža elektronika vakuumskih cijevi.⁶

Kad se von Neumann počeo sastajati s grupom s fakulteta Moore, već je bilo jasno da ne postoje značajnije zapreke uspjehu završetka ENIAC-a i pažnja je bila usmjerena na sljedeće računalo koje je trebalo projektirati, pokusno nazvano EDVAC. Von Neumann se odmah počeo baviti problematikom *logičke* organizacije novog stroja. Kao što se prisjetio Goldstine:

Eckert je bio oduševljen što su von Neumanna toliko zanimali logičke problemi koji okružuju novu ideju, i ti su sastanci bili mjesto velike intelektualne aktivnosti.

Takav rad na logičkom planu za novi stroj bio je baš po von Neumannovu ukusu i upravo je tu njegov prijašnji rad na formalnoj logici odigrao presudnu ulogu. Prije njegovog dolaska na scenu, grupa s fakulteta Moore se prvenstveno bavila velikim tehnološkim problemima. Nakon što je došao, von Neumann je preuzeo vodstvo logičke problematike.⁷

U lipnju 1945. John von Neumann je napisao slavni članak *The First Draft of a Report on the EDVAC* /Nacrt izvještaja o EDVAC-u/ u kojem se zapravo predlaže da EDVAC, koji se uskoro trebao izgraditi, bude realiziran kao fizički model Turingova univerzalnog stroja. Poput trake na tojapstraktnoj napravi, EDVAC bi imao sposobnost pohrane (von Neumannov naziv je "memorija") kako podataka tako i kodiranih instrukcija. Zbog praktičnosti EDVAC treba imati aritmetički dio koji bi svaku osnovnu aritmetičku operaciju (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje) mogao obavljati u jednom koraku, dok su u izvornoj Turingovoj zamisli ove operacije trebale biti izgrađene u obliku primitivnih operacija kao što je "pomak za jedan kvadrat ulijevo". Dok je ENIAC vršio aritmetičke operacije na brojevima prikazanim pomoću deset decimalnih znamenki, EDVAC je uživao u jednostavnosti koju mu je omogućila binarna notacija. EDVAC je trebao sadržavati i dio koji bi vršio logičku kontrolu tako da se upute iz memorije jedna po jedna izvršavaju u aritmetički dio. Taj način organizacije računala postao je poznat kao von Neumannova arhitektura i današnja računala su većinom organizirana prema tom temeljnom planu, iako su izgrađena od dijelova koji se posve razlikuju od onih koji su bili na raspolaganju EDVAC-u.⁸

Izvještaj o EDVAC-u nikada nije uznapredovao dalje od nacrti i očigledno je bio nepotpun na mnogo načina. Primjerice, na

mnogim mjestima bile su predviđene bilješke. Turingovo ime u njemu se nijednom ne spominje, ali oštrom oku njegov je utjecaj očigledan. Misao kako EDVAC treba biti svenamjenski spominje se mnogo puta. Poput Turinga, i von Neumann je slutio da su neke značajne sposobnosti ljudskog mozga rezultat toga što mozak ima sposobnosti slične onima univerzalnog računala. U izvještaju o EDVAC-u von Neumann se neprestano osvrće na analogiju između mozga i stroja o kojem raspravlja. Za strujne krugove vakuumskih cijevi, navodi von Neumann, može se utvrditi da se ponašaju slično kao neuroni u našem mozgu. Bez da se bavi tehničkim detaljima, on opisuje kako bi se od takvih strujnih krugova mogli izgraditi dijelovi potrebni EDVAC-u za aritmetičku i logičku kontrolu. Iako gotovo u potpunosti lišen bilješki, izvještaj se više puta poziva na rad dvojice istraživača MIT-a, objavljen 1943. godine, koji izlaže matematičku teoriju upravo takvih idealiziranih "neurona". Jedan od autora tog rada kasnije je rekao da su bili neposredno nadahnuti Turingovim člankom iz 1936. (onim u kojem je razložio svoj univerzalni stroj) i zaista, jedina bilješka u radu odnosi se na taj Turingov članak. Štoviše, autori rada su se potrudili pokazati kako se Turingov univerzalni stroj može oblikovati pomoću njihovih idealiziranih neurona i tu činjenicu navode kao osnovni razlog zbog kojeg vjeruju da se njihov rad kreće u pravom smjeru.⁹

Eckert i Mauchly su odlučno odbijali pomisao da von Neumann izda izvještaj o EDVAC-u pod svojim imenom. Vjerojatno nikada neće biti u potpunosti odgovoreno na pitanje o tome koliki dio izvještaja o EDVAC-u je osobni von Neumannov doprinos. Iako su Eckert i Mauchly kasnije poricali da je von Neumann značajnije pridonio, neposredno nakon što se pojavio izvještaj, napisali su:

U drugoj polovici 1944. pa sve do danas, dr. John von Neumann ... je na sreću bio na raspolaganju za konzultiranje.

Dao je svoj doprinos u mnogim raspravama o logičkoj kontroli EDVAC-a, pripremio je neke kodove za upute i testirao je te predložene sustave ispisujući kodirane upute za određene probleme. Dr. von Neumann je napisao i uvodni izvještaj u kojem je sažeta većina rezultata prijašnjih rasprava. . . . U njegovu su izvještaju fizičke strukture i naprave . . . zamijenjene idealiziranim elementima kako bi se izbjegli tehnički problemi koji bi mogli odvratiti pažnju od logičkih pitanja o kojima raspravljamo.¹⁰

Postoji još dokaza da je von Neumann htio biti siguran da je stroj koji je on opisivao bio najbliže moguće univerzalnom stroju. Stoga je naglašavao "logičku kontrolu" računala kao presudnu za to da je računalo "najbliže moguće *svenamjenskom*".¹¹ Da bi testirao opću primjenjivost EDVAC-a, von Neumann je napisao svoj prvi ozbiljniji program, ne za neku vrstu primjene dugotrajne obrade podataka, za što je stroj uglavnom razvijan, već jednostavno da djelotvorno razvrsta podatke. Uspjeh tog programa mu je pomogao da se uvjeri da je "opravdano već na osnovu sada dostupnih dokaza, zaključiti da je EDVAC vrlo blizu "*svenamjenskom*" stroju i da su sadašnji principi logičke kontrole ispravni".¹²

Članci koji su napisani iste godine kada i Izvještaj o EDVAC-u, potvrđuju von Neumannovu svijest o tome da su principi koji su bili u pozadini nacrtu elektroničkih računala, utemeljeni na logici. Uvod jednog takvog članka navodi:

U ovom članku pokušavamo raspravljati o [velikim računalnim] strojevima sa stajališta ne samo matematičara, već i inženjera i logičara, to jest . . . osoba ili grupa osoba koje su zaista prikladne da planiraju znanstvena oruđa.¹³

Jedan drugi članak, iako naglašava da samo logička razmatranja nisu dovoljna, jasno aludira na Turingove ideje:

Lako je pomoću metoda formalne logike uvidjeti da postoje kodovi koji su *in abstracto* prikladni kontrolirati i uzrokovati iz-

vedbu bilo kojeg niza operacija koje su u stroju na raspolaganju individualno i koje u njihovoj punini može zamisliti osoba koja razrađuje problem. Naše je mišljenje da su pri odabiru koda presudna puno praktičnija pitanja: jednostavnost opreme koju zahtijeva kod i jasnoća njezine primjene na zaista važne probleme, te brzina kojom te probleme rješava. Općenita rasprava o tim pitanjima ili rasprava koja bi krenula od prvih principa, odvela bi nas predaleko.¹⁴

Jasno je da su računala koja su nastala nakon Drugog svjetskog rata potpuno drugačija od prijašnjih automatskih kalkulatora. No, priroda te različitosti nije toliko jasna. Ti su poslijeratni strojevi trebali biti univerzalne naprave za sve namjene koje mogu izvršiti svaki simbolički postupak, ako su koraci tog postupka precizno definirani. Neki postupci mogu zahtijevati više memorije nego što stoji na raspolaganju ili mogu jednostavno biti prespori da bi bili korisni. Oni se mogu tek približiti Turingovom idealiziranom univerzalnom stroju. No, presudno je bilo to što su imali veliku memoriju (što odgovara Turingovoj beskonačnoj traci) u kojoj mogu koegzistirati upute i podaci. Ta labava granica između onoga što se smatralo uputom i onoga što se smatralo podacima, značila je da je moguće napraviti program koji druge programe tretira kao podatke. U ranim godinama programeri su većinom koristili tu slobodu da bi napravili programe koji modificiraju sami sebe. Današnji svijet operativnih sustava i hijerarhija programskih jezika otvara put za puno sofisticiranije primjene. Za operativni sustav, programi koje pokreće (na primjer vaš procesor teksta ili e-mail program) su podaci kojima barata operativni sustav. On svaki program opskrbljuje njegovim dijelom memorije i (kada ima više zadataka) prati zadatke koje treba izvršiti. Kompilatori prevode programe napisane u nekom od danas popularnih programskih jezika u upute koje računalo može neposredno izvršiti. Za kompilator, ti su programi podaci.

Nakon iskustva s ENIAC-om i Colossusom, ljudi koji su se bavili računalnom opremom nisu se zadovoljili brzinama izvedbe sporijim od onih za koje su znali da se mogu dobiti pomoću elektronike vakuumskih cijevi. Za općenamjensko računalo stvoreno prema modelu Turingova univeralnog stroja bila je potrebna fizička naprava koja ujedno može funkcionirati i kao dovoljno velika memorija. Na traci Turingova apstraktnog univeralnog stroja, kretanje od zadanog kvadrata do nekog drugog kvadrata zahtijevalo je mukotrpan postupak neprestanog pomicanja, kvadrat po kvadrat. To je bilo dobro za Turingove svrhe 1936. godine, jer ti teoretski strojevi nisu ni trebali napraviti ništa praktično. No, elektroničko računalo ubrzo je počelo tražiti i brzu memoriju. To je značilo da je podacima pohranjenim na bilo kojem mjestu u memoriji trebalo moći direktno pristupiti u jednom koraku, to jest da radna memorija treba biti memorija sa slučajnim pristupom.*

Kasnih četrdesetih godina dvadesetog stoljeća, kandidati za memoriju računala bile su dvije naprave; živina linija kašnjenja i katodna cijev. Linija kašnjenja se sastojala od cijevi tekuće žive, a podaci su se pohranjivali u obliku zvučnog vala u živi koji se odbija naprijed-natrag s jednog kraja cijevi na drugi. Katodne cijevi danas su uobičajene u televizijskim prijemnicima i računalnim monitorima. One mogu pohraniti podatke kao uzorak na površini cijevi. Obje naprave imale su ozbiljnih tehničkih problema, ali srećom za projekt EDVAC, Eckert je za vrijeme rata konstruirao kvalitetnije linije kašnjenja radi upotrebe u radarima. No, ranih pedesetih godina katodna cijev postaje najčešći memorijski medij.

U raspravama toga doba nova računala često su opisivana kao nešto što realizira ideju pohranjenog programa, jer su tada po prvi puta programi koji su se trebali izvršavati bili pohranjeni unutar računala. Na žalost, ta je terminologija poslužila za skrivanje či-

*Radna memorija današnjih računala napravljena je od silicijskih čipova koji se nazivaju RAM (*Random Access Memory*, memorija sa slučajnim pristupom).

njenice da je ono što je zaista revolucionarno u tim strojevima njihova univerzalnost – pohranjeni program je samo sredstvo za postizanje određenog cilja. Turingovo i von Neumannovo gledište je konceptijski tako jednostavno i toliko je postalo dio naše intelektualne atmosfere, da je teško shvatiti koliko je ono zapravo bilo radikalno novo. Puno je lakše cijeliti važnost novog izuma poput živine memorije nego važnost jedne nove i apstraktne ideje. Eckert je kasnije tvrdio da se on već bio dosjetio koncepcije takozvanog pohranjenog programa puno prije nego se na sceni pojavio von Neumann. Njegov dokaz je bio izvještaj u kojem je posao o automatskom programu na diskovima legura ili na radiranim diskovima. U tome nema ničega što bi podsjećalo na pojam svenamjenskog računala s velikom i fleksibilnom memorijom u kojoj se nalaze i upute i podaci. Takva se, eto, zbrka stvara ako taj golem napredak opišemo pojmom pohranjenog programa.¹⁵

Ogorčenost Eckerta i Mauchlyja s jedne strane i von Neumanna i Goldstinea s druge, zaoštrila se kada su Eckert i Mauchly pokušali napraviti komercijalni proizvod baziran na svom radu. Tražili su patente za ENIAC i za EDVAC. Njihova prijava za patent EDVAC-a nije uspjela, upravo zbog toga što se von Neumannov izvještaj proširio i zato EDVAC nije podlijegao autorskom pravu. Kao što smo već objasnili, oni su dobili patent za ENIAC, ali ga je sud kasnije proglasio nevažećim. Eckert i Mauchly su sigurno imali dobar predosjećaj kad su predviđali komercijalne mogućnosti svenamjenskih elektroničkih računala, ali se od te svoje proročanske spoznaje nisu mogli okoristiti.¹⁶

Odlaskom Eckerta i Mauchlyja fakultet Moore je oslabio, a von Neumann i Goldstine su nastavili razvijati računalo pomoću memorije s katodnom cijevi na Institutu za napredna istraživanja u Princetonu. Von Neumann je polagao nadu u cijev za posebne namjene koju je napravila tvrtka RCA, no se pokazalo da ona nije dovoljno djelotvorna. Međutim, engleski inženjer Frederic Wil-

liams (1911–1977) razvija metode pomoću kojih se za računalnu memoriju mogu koristiti obične katodne cijevi. Nekoliko godina je prevladavala upravo “Williamsova memorija”. Izrađeno je nekoliko strojeva sličnih onomu kojeg je izradio Institut, od milja zvanih “johnniac” po Johnu von Neumannu. U trenutku kada je IBM odlučio da je došlo vrijeme da se općenamjenska elektronička računala stave na tržište, njihov je prvi model (701) bio prilično sličan johnniacima.*

ACE Alana Turinga

Nakon završetka Drugog svjetskog rata, britanski Nacionalni laboratorij za fiziku (NPL) se značajno proširio i dobio je novi Odsjek za matematiku. Na mjesto pročelnika tog Odsjeka imenovan je J. R. Womersley (1907–1958). On je rano shvatio praktične posljedice Turingova rada *Computable Numbers* /Izračunljivi brojevi/ iz 1936. Godine 1938. otišao je tako daleko da je napravio nacrt univerzalnog stroja koji koristi električne releje, ali je napustio tu zamisao shvativši da bi ta naprava bila prespora. Kada je u veljači 1945. posjetio Sjedinjene Države, vidio je ENIAC i dobio primjerak von Neumannova izvještaja o EDVAC-u. Womersley je reagirao tako da je zaposlio Alana Turinga.

Turing je krajem 1945. napisao sjajan izvještaj o ACE-u (*Automatic Computing Engine*). Detaljna usporedba izvještaja o ACE-u i von Neumannova izvještaja o EDVAC-u pokazuje da dok je potonji “nacrt nedovršen... štoviše... nepotpun...” izvještaj o ACE-u je “potpun opis računala, sve do dijagrama logičkih slije-

Osobno sam ušao u područje programiranja u proljeće 1951. kad sam počeo pisati kôd za ORDVAC. To je bio johnniac napravljen na Sveučilištu Illinois. U ljeto 1954. napisao sam program koji je radio na originalnom johnniacu na Institutu za napredna istraživanja. To se računalo danas može vidjeti na Institutu Smithsonian u Washingtonu.

dova" koji čak navodi i "cijenu od oko 11,200£". U popis od deset problema koje može riješiti ACE, Turing je uključio i dva problema koja neposredno ne uključuju numeričke podatke, a to su igranje šaha i rješavanje jednostavnijih slagalica.¹⁷ Time je pokazao koliko je zapravo široka bila njegova vizija.

Turingov ACE veoma se razlikovao od von Neumannovog EDVAC-a. Različitost strojeva je vrlo dobro ocrtavala različite stavove te dvojice matematičara. Usprkos von Neumannovoj brizi oko toga da njegov stroj bude zaista "svenamjenski", on je ipak stavio naglasak na broječane izračune, a logička organizacija EDVAC-a (i svih kasnijih johnniaca) je trebala ubrzati kretanje u tom smjeru. Turing je uvidio da bi se ACE mogao upotrebljavati u mnogim zadacima u kojima složena aritmetika nije prikladna, pa je ACE organizirao više minimalistički, sličnije Turingovim strojevima opisanim u radu *Computable Numbers*. Aritmetičke operacije obavljat će se programski, pomoću softvera, a ne hardvera. Zbog toga je nacrt ACE-a predvidio poseban mehanizam za umetanje prethodno programiranih operacija u dulji program.¹⁸ Na prijedlog da preinači ACE u von Neumannovu smjeru, Turing je odgovorio iznimno oštro:

[To] je upravo suprotno od onog smjera kojim mi ovdje idemo i više je u američkoj tradiciji rješavanja problema dodavanjem nove opreme, a ne razmišljanjem. . . . Osim toga, izostale su neke operacije koje mi smatramo važnijima od zbrajanja i množenja.¹⁹

Turingovim minimalističkim idejama bilo je suđeno da imaju mali ili nikakav utjecaj na razvoj računala. Pa ipak, gledajući unatrag, možemo primijetiti da je nacrt ACE-a anticipirao takozvano mikroprogramiranje, koje osnovne operacije računala neposredno stavlja na raspolaganje programeru. Osim toga, današnja osobna računala su izrađena oko silicijskih mikroprocesora koji su zapravo univerzalna računala na čipu, a oni su sve savršeniji. Su-

protna paradigma CISC arhitekturi je takozvana RISC (*Reduced Instruction Set Computing*) arhitektura koju je prihvatio velik broj proizvođača računala; RISC na čipu koristi minimalan skup uputa, a potrebna funkcionalnost se dobiva programiranjem, što je opet sasvim na liniji filozofije ACE-a.

20. veljače 1947. godine Turing se obratio Londonskom matematičkom društvu s temom ACE-a, odnosno digitalnih elektroničkih računala općenito. Započeo je osvrnuvši se na svoj rad *Computable Numbers* iz 1936:

Razmišljao sam o stroju koji ima centralni mehanizam i beskonačnu memoriju koju sadrži beskonačna traka. . . . Jedan od mojih zaključaka je bio da su ideja "heurističkog postupka" i "strojnog postupka" zapravo jednake. . . . Strojevi poput ACE-a mogu se smatrati praktičnim verzijama . . . one vrste stroja o kojem sam razmišljao. . . . Postoji barem vrlo bliska analogija među njima . . . digitalni računalni strojevi kakav je ACE . . . su zapravo praktične verzije univerzalnog stroja.²⁰

Turing je nastavio načelnim pitanjem "u kojoj mjeri računalni stroj može oponašati ljudske aktivnosti". To ga je dovelo do pretpostavke o mogućem računalnom stroju koji je programiran da uči i kojemu su dozvoljene pogreške. "Postoji nekoliko teorema koji upravo kažu da . . . ako se očekuje da stroj ne griješi, onda ne može biti i inteligentan u isto vrijeme. . . . Ali, ti teoremi ništa ne govore o tome koliko inteligentan može biti stroj ako ne teži nepogrešivosti." To je bila neizravna potvrda Gödelovog teorema o nepotpunosti o kojem ćemo više govoriti u sljedećem poglavlju. Turing je svoje predavanje završio zahtjevom za "*fair play* za računala" od kojih ne treba očekivati da manje griješe nego ljudi, uz prijedlog da bi igranje šaha mogla biti primjerena vježba za početak. Sve to se događalo prije nego li je konstruirana ijedna takva naprava! Svi opisi kažu da je publika zapanjeno šutila.²¹

Suočene s poteškoćama oko dobivanja adekvatnih sredstava i podrške, vođe Bletchley Parka su poslale pismo Winstonu Churchill, koji se smjesta pobrinuo da dobiju sve što im je potrebno. Izrada ACE-a nije mogla dobiti takav prioritet. Osim toga, uprava NPL-a se ponašala veoma neprimjereno. T. Flowers, koji je tako bravurozno konstruirao Colossus bio bi idealna osoba za izrađivanje ACE-a, ali je bio prezaposlen poslijeratnim telekomunikacijama da bi bio od koristi, iako je imao ugovor sa NPL-om i radio neke poslove vezane za linije kašnjenja za računalnu memoriju. Minimalistički nacrt ACE-a stvarao je zabrinutost, a možda i osjećaj da je tehnološke probleme bolje povjeriti Amerikancima nego jednom ekscentričnom profesoru iz Engleske. Koliko je taj profesor pridonio ratnoj pobjedi, ostala je dobro čuvana tajna još puno godina. Kad je Williams pokazao da njegova memorija s katodnom cijevi radi (vidi str. 215), ponuđen mu je posao na ACE-u, ali ga je on odbio. Uprava NPL-a je naivno mislila da može zaposliti Williamsa na izradi računala NPL, no on je imao dovoljno sredstava da izgradi vlastito računalo u Manchesteru. Za Turinga je to bilo previše i otišao je. Prvo je preuzeo svoje mjesto na Cambridgeu, a zatim je prihvatio ponudu za posao sa Sveučilišta u Manchesteru. Tamo je njegov stari prijatelj i ratni drug Max Newmann započinjao računalni projekt. Nakon promjene uprave na NPL-u je uspješno je izgrađena mala verzija ACE-a. Dobro je radila godinama, a zvala se "Pilot ACE".

Eckert, von Neumann i Turing

Priča o onome što se obično naziva pojmom pohranjenog programa ima tri glavne verzije. Prva priča smatra da je taj program rezultat von Neumannove genijalnosti i da je objavljen u njegovom izvještaju o EDVAC-u. Eckert je uzviknuo "faul" i uporno je tvrdio da je on iznio plan za računalo s pohranjenim programom prije

nego se von Neumann priključio grupi s fakulteta Moore. Tvrdio je da je u izvještaju o EDVAC-u prikazano zajedničko razmišljanje cijele grupe. Objavljeni su i neki radovi koji su podržavali Eckertovo mišljenje.²² Ime Alana Turinga uopće se nije spominjalo. Podržavajući von Neumannovu tvrdnju, a zaboravivši Turingovu ulogu, Goldstine je napisao:

Po mom mišljenju, von Neumann je prvi jasno shvatio da računalo zapravo obavlja logičke zadatke, a da su mu električni aspekti samo pomoć.²³

Naravno, i Turing je to itekako shvaćao.

Raskorak između razmišljanja na kojemu se temeljio ENIAC i onoga koje je u temelju univerzalnog stroja je bio tolik da mi je teško povjerovati da je Eckert mogao uopće razmišljati o nečem takvom. Kad se Turing tužio na "američku tradiciju rješavanja problema dodavanjem sve više opreme, a ne razmišljanjem" vjerojatno je velikim dijelom mislio i na ENIAC. Iz Turingova zaključka kako su "ideje 'heurističkog' i 'strojnog' postupka jednake", jasno prozlaži da je pretvaranje brojeva iz decimalnih u binarne i obratno jedna od najjednostavnijih operacija stroja. Eckert i Mauchly su se bavili zahtjevom da se količina unosi i da izlazi u decimalnoj notaciji i nisu shvatili posljedice Turingova zaključka. Svoj su problem riješili konstruiranjem čudovišno velikog stroja koji je sve operacije vršio u decimalnoj notaciji. Za rješavanje mnogih problema koji se pojavljuju u praksi, potrebno je naći vrijednosti određenih limesa diferencijalnog računa. Diferencijalni analizatori imaju posebne sklopove koji mogu izračunati takve približne vrijednosti i stoga su Eckert i Mauchly u svoj ENIAC dodali sklopke za slične operacije, što je za digitalni stroj potpuno nepotrebno i neprikladno. Udžbenici diferencijalnog računa opisuju metode kojima su za izračunavanje tih vrijednosti potrebne samo četiri osnovne aritmetičke operacije.

Eckert je ipak dao golem doprinos EDVAC-u. Kao rješenje problema velike memorije on je predložio živine linije kašnjenja. Njih je Eckert koristio za radare i puno je znao o njima. Utoliko je znakovito da je, u dokazu o tome kako se on prvi dosjetio pohranjenog programa, citirao jednu bilješku u kojoj se govori o automatskom programiranju na diskovima legura, a ne spominju se linije kašnjenja o kojima je znao sve i koje bi bile puno vjerodostojniji podsjetnik.

Zanimljivo je usporediti vonNeumannovo i Turingovo stajalište o programiranju. Von Neumann je programiranje zvao "kodiranje" te je jasno dao do znanja da to smatra činovničkim poslom koji ne zahtijeva puno razmišljanja. Jedan događaj dobro pokazuje kako se postupalo na Institutu za napredna istraživanja. Oni su iskorištavali studente za ručno prevođenje računalnih uputa napisanih pomoću čitljivih mnemotehnika, u jezik stroja. Jedan je nadobudni mladi student dao prijedlog za sklop koji bi automatski vršio to prevođenje. Priča se da je von Neumann ljutito odgovorio da bi bilo šteta koristiti vrijedno znanstveno oruđe za obavljanje jednog puko činovničkog posla. Turing je u izvještaju o ACE-u, kazao da bi postupak programiranja "trebao biti očaravajući. Ne bi smjela postojati opasnost da on ikada postane mučan, jer ćemo svaki mehanički proces moći prepustiti samom računalu".²⁴

Iako se Eckertova i von Neumannova verzija još prepričavaju, uvelike kruži i treća priča. Ona kaže da je von Neumann ideju za praktični univerzalni stroj dobio iz Turingova rada. Kad sam 1987. napisao članak u kojem se izlaže takav stav, osjetio sam da sam u njemu prilično usamljen.²⁵ Nakon toga su informacije o Turingovoj ulozi u dešifriranju njemačkih informacija za vrijeme rata, postale poznate većem broju ljudi. Osim toga, puno ljudi je saznalo za sramotne načine na koje je Turing bio proganjan zbog svoje homoseksualne veze. Tu problematiku, kao i važnost Turingovih matematičkih ideja prikazala je televizijska drama *Breaking*

the Code. Drama je igrala u Londonu i na Broadwayju, a na osnovu nje napravljena je i televizijska drama koja je prikazana na PBS-u.²⁶ Postoje i televizijski dokumentarci o tome. Čak je i časopis *Time*, u izdanju od 29. ožujka 1999, stavio ime Alana Turinga na popis dvadesetoro najvećih znanstvenika i mislilaca dvadesetog stoljeća.* *Time* je pisao:

Da bi se izradilo suvremeno računalo, spojilo se jako puno ideja i naprednih tehnologija. Zato bi bilo glupo jednom čovjeku dati priznanje za takav izum. To ne umanjuje činjenicu da svako onaj koji tipka po tastaturi, svatko tko otvara novi dokument ili neki program, zapravo radi na jednom konkretiziranom Turingovom stroju.

Upravo tako! A evo što je *Time* rekao o von Neumannu:

Doslovno sva današnja računala, od deset milijuna superračunala do sitnih čipova koji napajaju mobilne telefone i Furbije, imaju nešto zajedničko. Svi su "von Neumannovi strojevi", odnosno varijacije temeljne arhitekture računala koju je izložio von Neumann četrdesetih godina, nadograđujući rad Alana Turinga.

Zahvalna nacija nagrađuje svog junaka

Kad je u jesen 1948. Turing stigao u Manchester, grad se još oporavljao od rata i neke su četvrti izgledale sablasno kao prvih dana industrijske revolucije. Jedan se autor poslužio poznatom knjigom Friedricha Engelsa kako bi dočarao prljavštinu u kojoj je živjela radnička klasa Manchestera 1844. godine:

*Jedan od njih je i Kurt Gödel.

Ono što on [Engels] ... opisuje ... spada u okruženje bijede, poniženja, brutalnosti i nehumanosti, kakvo nikad prije nije viđeno na kugli zemaljskoj... Približavajući se tim dvorištima, susrećemo se s "neviđenom prljavštinom i nečistoćom ... [i] sa svakako najstrašnijim stanovima koje sam dosad vidio... U jednom takvom dvorištu na samom ulazu... nalazi se nužnik koji nema vrata. On je toliko prljav da se u njega može ući ili iz njega izaći, mučno se probijajući kroz lokve ustajalog urina i izmeta".²⁷

Naravno, za jedno stoljeće sanitarne prilike su se jako popravile, a osim toga pripadnik Turingova društvenog sloja ni u kom slučaju ne bi živio u radničkoj četvrti. Turinga je veza s jednim pripadnikom "nižeg" sloja dovela do katastrofe.

Možemo samo zamisliti kako je bio ogorčen na glupo vodstvo NPL-a koje je protratilo njegov talenat i osujetilo san što ga je izložio u svom izvještaju o ACE-u, obraćajući se Londonskom matematičkom društvu. U međuvremenu, računala su se već izrađivala. Maurice Wilkes (1913–) je na samom Sveučilištu u Cambridgeu rukovodio konstruiranjem EDSAC-a, računala koje je bilo istog tipa kao EDVAC. Za razliku od Turinga na NPL-u, Wilkes je imao dovoljno sredstava za svoj projekt. Turingu se vjerojatno bilo jako bolno sjećati kako je na NPL-u ismijao Wilkesove bilješke za koje je rekao da su u "američkoj tradiciji rješavanja poteškoća dodavanjem više opreme, umjesto razmišljanjem". EDSAC je 1949. već radio i mogao je obavljati razne zadatke. Turinga je samo još više mogla uznemiriti činjenica da su Wiliams i njegovi suradnici navodno otkrili mikroprogramiranje i sustavno korištenje potprograma. Oba ta navodna otkrića jasno je opisao u svom izvještaju o ACE-u. Turing je u Manchesteru trebao voditi projekt računala, ali je Wiliams (vidi str. 8) jasno dao do znanja da ga ne zanimaju ideje nekog matematičara o tome kako će izgraditi svoje računalo. Računalo Mark I Manchester uspješno je radilo već 1949, a ono je sjajno dokazalo Wiliamsovu tehniku upotrebljavanja već kori-

štenih katodnih cijevi kao memorije. Američka računala su ubrzo počela koristiti takvu memoriju. I ovog puta je temeljni logički nacrt bio izveden iz von Neumannovog izvještaja o EDVAC-u, a ne iz radova Alana Turinga.²⁸

Herman Goldstine je govoreći o Turingovu ACE-u primijetio da, iako je nacrt "u nekom aspektima bio privlačan", "dugoročno gledano nije bio napredan i uspješniji nacrti su ga eliminirali".²⁹ Zaista nije pošteno smatrati da je to bio rezultat neke vrste prirodne selekcije. Pilot ACE, koji je konkretizirao Turingove ideje, savršeno je dobro radio. Nema razloga vjerovati da neko veće ACE računalo ne bi radilo jednako dobro, samo da je bilo organizacije i sredstava da ga se napravi. To je lakše shvatiti u kontekstu općenitijeg pitanja o tome koje funkcije računala treba omogućiti hardver, a koje softver. Turing je dao nacrt za prilično jednostavan stroj u kojemu je puno toga morao omogućiti softver, ali je zato programer imao veliku kontrolu pozadinskih operacija. To bi bila izrazita prednost kod pisanja programa koji trebaju izvršavati logičke, a ne numeričke izračune. S razvojem ovog područja, nastavljale su se i rasprave o tome što je za računalo korisnije. Zadnja takva rasprava bila je u vezi RISC arhitekture (vidi str. 217).*

Turing je stigao u Manchester 1948. godine. Tada je jako malo ljudi znalo što je on radio za vrijeme rata, iako ga je Vlada i dalje konzultirala. Zaposlili su ga da radi na zadatku primjenjivosti nekih administrativnih funkcija vezanih uz računalo Mark I, ali su

*U ljeto 1954. i sâm sam se borio sa skupom temeljnih uputa koje je von Neumann dao za računalo Instituta za napredna istraživanja, a odnosila su se na dugotrajnu obradu podataka. Primijenio sam algoritam za ispitivanje istinitosti rečenica iz PA (definiran u šestom poglavlju). On sadrži zbrajanje, ali ne i množenje. (Urednici jedne antologije radova iz područja tehnike računalne logike su u svom predgovoru, osvrćući se na moj program, naveli: "Godine 1954. računalni program je prvi put proizveo matematički dokaz dobiven pomoću računala." [Siek-Wright], str. ix.) Uopće ne sumnjam da bi skup uputa iz ACE-a bio puno prikladniji za ono što sam tada radio.

inženjeri uglavnom radili po svom pa su se Turingovi rezultati otkrivalo na posve nezadovoljavajući način. Umjesto da iskoristi svoj položaj za uvođenje elegantnih rješenja iz izvještaja o ACE-u, koja bi programerski posao učinila ugodnim i lakim, on je postao korisnik stroja i radio je direktno s nulama i jedinicama strojnoga jezika. Radio je i na nekim računalnim problemima o kojima je razmišljao prije rata, ali njegovi su su interesi ubrzo prebacili na biologiju. Tražio je odgovor na pitanje kako to da su se živa bića razvila u različite oblike koje susrećemo u prirodi, a započela su od nakupina identičnih stanica. Taj problem morfogeneze doveo ga je do diferencijalnih jednadžbi pa je informacije o rješenjima tih jednadžbi tražio računalom. Koristeći stroj upravo za onakvu dugotrajnu obradu podataka kakvu je namjeravao nadići, Turing je u popularnoznanstvenim člancima i javnim nastupima iznio svoju trajnu viziju potencijala računala za inteligenciju sličnu ljudskoj.

Turing je malo prije Božića 1951. započeo kratku vezu s devetnaestogodišnjim mladićem Arnoldom Murrayjem. Murray je bio bistar mladić iz siromašne radničke obitelji. U vrijeme kad mu je Turing pristupio na ulici, bio je uvjetno pušten iz zatvora u koji je došao zbog sitne krađe. Turing ga je pozvao u svoju kuću, a Murrayu je ona vjerojatno izgledala poput palače. Jedne večeri, nepunih mjesec dana poslije Božića, Turing je vrativši se kući otkrio da je opljačkan. Bez obzira na to što ukupna oduzeta vrijednost nije iznosila više od 50£, Turing je bio prilično ljut. Ispostavilo se da je Murray s velikom sigurnošću mogao tvrditi tko je opljačkao Turinga. Najvjerojatnije je to bio Murrayjev poznanik, dotični Harry. Harry se nije bojao opljačkati homoseksualca, za kojeg je računao da neće otići na policiju. On je sasvim ispravno pretpostavljao da nijedan razborit čovjek koji bi se našao na Turingovu mjestu, sigurno ne bi napravio takvu glupost da ode na policiju. Turing je napravio upravo to.

Policija je ubrzo shvatila što se dogodilo između Murrayja i Turinga, a Turing, suočen s optužbama, ništa nije poricao. Nije vidio ništa sramotno ili loše u prirodi svojih seksualnih osjećaja ni u načinu na koje ih je kanio zadovoljiti ne učinivši pritom nikome ništa nažao. Bilo kako bilo, zakon je o tome bio sasvim jasan. Ono što su učinili Turing i Murray, pružajući zadovoljstvo jedan drugome, bilo je čin "velike bestidnosti" koji se kažnjavao s najviše dvije godine zatvora. Sudac koji je vodio Turingov slučaj, postupajući, kako je vjerovao, humano, dozvolio mu je da izbjegne zatvor pod uvjetom da se na godinu dana podvrgne hormonalnim injekcijama kako bi se smanjio njegov seksualni nagon. Odabrani hormon bio je estrogen i, kakav god imao učinak na Turingov seksualni nagon, imao je i jednu popratnu pojavu: Turingu su narasle grudi.

U listopadu 1938. Alan je gledao Disneyevu *Snjeguljicu i sedam patuljaka*. "Jako ga se dojmila scena u kojoj zla vještica njiše jabuku na konopcu iznad vrućeg otrovnog napitka, mrmljajući

Umoči jabuku u napitak

Nek' usrkne uspavanu smrt."

Neprestano je pjevušio te stihove i u tome je očito uživao.³⁰ Alan Turing je izvršio samoubojstvo 7. lipnja 1954, zagrizavši polovicu jabuke namočenu u cijanidnu otopinu. Puno se nagađa o tome što je navelo Turinga na taj čin. Drama *Breaking the Code* pretpostavlja da su vlasti imale prigovore na Turingova putovanja u inozemstvo, a on je smatrao da će tamo najlakše naći seksualne partnere. U Engleskoj je seks postao preopasan i ako se sjetimo kakva je bila atmosfera pedesetih godina u toj zemlji, sasvim je izvjesno da su vlasti prigovarale tome što putuje u inozemstvo. Nakon osude oduzeli su mu dokumente pripadnika tajne službe s kojima se mogao slobodnije kretati. No, nije postojao način da se izbrišu

tajni podaci koje je nosio u svom mozgu. Pouzdano se zna da je policija zaustavila muškarca kojeg je Turing sreo na putovanju u Norvešku i da su ga protjerali iz Engleske kad je došao posjetiti Turinga. Na žalost, sasvim je izvjesno da je Turinga u smrt natjerala vlast naroda za čiji je spas – neopjevan – učinio toliko mnogo.

9 Nakon Leibnizovog sna

Obraćajući se Londonskom matematičkom društvu, Turing je rekao:

Očekujem da će digitalni računalni strojevi na koncu potaknuti velik interes za simboličku logiku . . . Jezik kojim komuniciramo s tim strojevima . . . je jedna vrsta simboličke logike.¹

Veza između logike i računarstva na koju ovdje aludira Turing glavna je tema ove knjige. Pa ipak, čitatelji se i dalje mogu pitati na koji su način povezani logika i računarstvo? Što je zajedničko aritmetici i zaključivanju? Možemo to pokušati shvatiti kroz kolkvijalnu upotrebu glagola "računati" (eng. *reckon*) u kojoj on nema svoje osnovno značenje:

Računam da joj sada tepa na mjesečini.

To je replika melankoličnog junaka filma B-produkcije u kojoj govori o svom suparniku, ne znajući (što mi znamo) da je naš junak već osvojio njeno srce. U svojoj izjavi on ne govori o aritmetici nego o *zaključivanju*. Zaključuje na osnovu onoga što misli da zna o svom perfidnom suparniku. Veza između računanja i zaključivanja koju naslućujemo u takvoj upotrebi riječi "računam" je istinska i duboka. Računanje brojevima samo po sebi je zapravo oblik zaključivanja, a velik dio ljudskog zaključivanja možemo smatrati nekom vrstom računanja. Zanimljivo je da, kao što jasno

pokazuje naš primjer, ljudi zapravo uviđaju tu povezanost računanja i zaključivanja, barem podsvjesno. Isto možemo vidjeti i kad se nekoga opisuje kao "proračunatu" osobu.

Već je Aristotel pokušao svesti logičko zaključivanje na formalna pravila. Ono je bilo i u osnovi Leibnizova sna o univerzalnom računalnom jeziku, a stajalo je i u pozadini Turingovog dostignuća koje je pokazalo da njegov univerzalni stroj može obaviti svaki izračun. Računanje i logičko zaključivanje su zapravo dva lica iste medalje. Ta spoznaja je omogućila ne samo programiranje računala za ogroman broj različitih zadataka, već i samo njihovo projektiranje i izradu.

U siječnju 1999. u Anaheimu u Californiji održan je godišnji skup Američkog udruženja za napredak znanosti, pod nazivom *Izazovi za novo stoljeće*. Bio je to ozbiljan, vrlo bogat skup s predavanjima i okruglim stolovima iz golemog raspona tema. Dok sam pregledavao program, pažnju mi je privuklo predavanje pod naslovom *O izvanrednoj djelotvornosti logike u računarstvu*. Predavanja petorice vodećih inženjera računarstva, koji su ujedno i logičari, potvrdila su ispravnost Turingova predviđanja. U programu predavanja između ostalog stoji:

U proteklih dvadeset i pet godina došlo je do sveubuhvatnog i stalnog prožimanja logike i računarstva. To prožimanje je u neprestanom porastu. Logika računarstvu pruža kako temeljni okvir koji je objedinjuje, tako i oruđe za rad... Ovo predavanje će dati pregled izvanredne djelotvornosti logike u računarstvu i predstaviti neka područja u kojima je logika odigrala presudnu ulogu za računarstvo. To su područja umjetne inteligencije, računske kompleksnosti, distribuiranog računarstva, sustava baza podataka i provjeravanja modela.²

Računala, mozak i um

Inženjer računarstva s MIT-a Joseph Weizenbaum 1965. godine je napisao program imena ELIZA, koji vodi dijalog s korisnikom koji pomoću tastature upisuje rečenice na engleskom jeziku. ELIZA je trebala oponašati psihoterapeuta na veoma primitivan način. Evo prijepisa razgovora između jedne verzije ELIZE i mene:³

ELIZA: DOBAR DAN. MOLIM VAS RECITE MI SVOJ PROBLEM.

MARTIN: Moj se problem ne može objasniti.

ELIZA: ZAŠTO KAŽETE DA SE VAŠ PROBLEM NE MOŽE OBJASNITI?

MARTIN: Zato što uvijek kad ga pokušam objasniti, zaplačem.

ELIZA: JE LI TO PRAVI RAZLOG?

MARTIN: Možda i nije.

ELIZA: NISTE BAŠ SASVIM SIGURNI.

MARTIN: Ah, naravno da nisam.

ELIZA: MOŽETE LI TO MALO OBJASNITI?

MARTIN: Mogu, ali to su moje privatne stvari.

ELIZA: ZAŠTO STE TAKO UVJERENI?

MARTIN: Pokušavam biti dostojanstven.

ELIZA: Dostojanstven?

MARTIN: Ne možeš ti to razumjeti.

ELIZA: RAZGOVARAMO O TEBI, A NE O MENI.

MARTIN: Dosta mi je. Do viđenja!

ELIZA: KAŽEŠ DA TI JE DOSTA.

MARTIN: Već sam rekao do viđenja.

ELIZA: MOŽEŠ LI TO OBJASNITI?

MARTIN: Do viđenja.

ELIZA: DO VIĐENJA. TO BI BILO 75\$, MOLIM.*

Naravno da ELIZA ništa ne razumije. Program primjenjuje sasvim jednostavan algoritam. Ako prepozna određene ključne riječi odgovorit će, a ako ne, samo će ponoviti korisnikovu rečenicu. Jedna ključna riječ je na primjer "ti". Kad je računalo prepozna dat će odgovor RAZGOVARAMO O TEBI, A NE O MENI. U rečenici "Ti si moja majka" postoje dvije ključneriječi; "majka" i "ti". Takva rečenica će dobiti sljedeći odgovor: PRIČAJ MI O SVOJOJ OBITELJI jer je ključna riječ "majka" važnija od ključne riječi "ti". Ključna riječ "da" dobiva odgovor ZAŠTO STE TAKO UVJERENI? Treba primijetiti da ELIZA odgovara na riječi "do viđenja" samo ako stoje na početku rečenice.

Alan Turing je 1950. objavio svoj klasični esej "Computing Machinery and Intelligence" u kojem predviđa da će do kraja stoljeća postojati računalni programi koji će tako vješto razgovarati da nećemo moći razaznati čavrljamo li s drugom osobom ili s računalom.⁴ Ta pretpostavka je bila pogrešna. Interaktivni programi koji mogu odgovarati na uobičajene engleske rečenice danas su puno razvijeniji od ELIZE, ali i najbolji takvi programi još su daleko od jezične vještine prosječnog petogodišnjaka.

Turing je, bez ulaženja u nejasna filozofska i teološka pitanja, htio razjasniti može li se reći da se računalo ponaša inteligentno. U tu svrhu je iznio jedan objektivan i lako primjenjiv test. Ako računalo možemo programirati tako da može razgovarati s prosječno inteligentnom osobom o bilo kojoj temi, tako dobro da korisnik ne može odrediti razgovara li s osobom ili sa strojem, onda se

*Svaki korisnik osobnog računala ELIZA je dostupna, između ostalog, unutar programa GNU Emacs. – op. ur.

moramo složiti da računalo pokazuje znakove inteligencije. Mi smo jaš daleko od toga da proizvedemo takav računalni program i puno ljudi smatra da i ako se takav program proizvede to neće nužno značiti da je ponašanje računala inteligentno.

Računalni lingvisti traže Sveti Gral obdarivanja računala sposobnošću da se služe običnim jezikom, ali strojna inteligencija se traži i u drugim područjima koja ne ovise o običnom jeziku. Jedno od tih područja je i igranje šaha. Teško je ne priznati činjenicu da se osoba koja makar prilično dobro igra šah, ponaša inteligentno. Isto je tako poznato da postoje programi koji vrlo dobro igraju šah. Većina prosječnih igrača, ako ne želi izgubiti baš svaki put, mora postaviti te programe na niže nivoe. Računalo Deep Blue uspjelo je u veljači 1996. godine pobijediti svjetskog prvaka Garija Kasparova. Možemo li zato tvrditi da je Deep Blue inteligentan? Filozof John R. Searle napisao je, na sebi svojstven provokativan način, članak u kom tvrdi da se za Deep Blue ne može pouzdano tvrditi da uopće igra šah:

Evo što se zbiva unutar Deep Bluea. Računalo ima hrpu simbola bez značenja kojima su programeri označili pozicije figura na ploči. Ima istu takvu hrpu simbola koje su koristili da bi pomoću njih označili moguća kretanja. Računalo ne zna da simboli predstavljaju šahovske figure i kretanja, jer ono ne zna ništa.⁵

Kako bi bio još uvjerljiviji, Searle je pribjegao nekoj vrsti parabole koja je postala prilično poznata. Priča izvorno govori o čovjeku koji sjedi u sobi i prima simbole izvana, traži ih u knjizi i iz nje bira simbole koje treba poslati kao svoj odgovor. Kasnije doznajemo da je knjiga napisana tako da simboli koji se šalju zapravo sačinjavaju razgovor na kineskom jeziku. Naš čovjek ne zna kineski i nema pojma što predstavljaju simboli. Nećemo se sada baviti zaključcima koji se mogu izvući iz ove neobične priče, već ćemo nastaviti sa Searleovom "šahovskom sobom":

Zamislimo da je čovjek koji ne zna igrati šah zaključan u sobu i dobije skup njemu besmislenih simbola. On ne zna da simboli zapravo predstavljaju pozicije na šahovskoj ploči. Gleda u knjigu što bi trebao napraviti i odgovara novim besmislenim simbolima. Ako je knjiga pravila, odnosno program, dobro napisana, možemo pretpostaviti da će on pobjeđivati u šahu. Ljudi koji nisu u sobi rekli bi: "Ovaj čovjek razumije šah, dapače dakle dobro igra šah budući da pobjeđuje." No, bili bi potpuno u krivu. Taj čovjek ne razumije ništa o šahu, to je samo računalo. Poanta parabole je sljedeća: ako za čovjeka vrijedi da to što izvršava program za igranje šaha, ne znači da on razumije šah, onda to isto vrijedi i za svako računalo.

Čitatelj ove knjige možda će primijetiti da je u ovom primjeru na proizvoljan način odvojen softver od hardvera. Čovjek u sobi se ponaša poput primitivne verzije univerzalnog računala. Jasno je da samo računalo ne igra šah. Takvo što se može tvrditi samo o čovjeku skupa s knjigom uputa. Evo moje verzije Searleove parabole:

Napredno dijete, čija majka jako voli šah, već se umorilo od promatranja kako ona igra i traži da mu dozvoli da i ono zaigra kao njezin protivnik. Majka pristaje, ali pod uvjetom da pomiče figure samo kad mu ona kaže i točno tamo gdje mu kaže. Dijete se tako i ponaša. Radeći ono što mu majka šapće u uho, dijete postiže šah-mat. Searle bi nam u takvom slučaju rekao da dijete ništa ne zna o šahu i da ono sigurno ne igra šah. Tko bi se mogao usprotiviti tome?

Suvremeni filozofi se služe metodom pričanja priča za koje znaju da duhovito prikazuju neke odnose koji bi inače ostali skriveni. Možda ne bi bilo besmisleno поближе objasniti priču o "šahovskoj sobi". Jedan moj kolega sudjelovao je u izrađivanju nacрта za snažno računalo Deep Thought, konstruirano baš za igranje šaha. To računalo prethodilo je računalu Deep Blue. On mi je dao neke

podatke na osnovi kojih sam izračunao da bi, kad bi se hardver i softver koji čine Deep Thought prikazali u knjizi (ili vjerojatnije cijeloj biblioteci) uputa koje može izvršiti čovjek, za jedan pomak jedne figure trebalo nekoliko godina. Stavite cijelu obitelj u šahovsku sobu, da djeca preuzmu posao kad roditelji umru! Inače se neće završiti ni jedna jedina partija.

Searle nam kaže da Deep Blue "ima hrpu simbola bez značenja". Kad bismo mogli gledati kako radi Deep Blue, ne bismo vidjeli ni kakve simbole, ni besmislene ni bilo kakve druge. U strujnim krugovima kreću se elektroni. Isto tako, kad bismo mogli gledati što se događa u Kasparovljevoj lubanji dok igra, ne bismo vidjeli ni kakve šahovske figure, već samo neurone. Još uvijek se malo znao o tome kako je organiziran naš mozak dok se bavi onim što smatramo simboličkim informacijama. Puno više znamo o tome kako su za te svrhe organizirana računala poput Deep Bluea, budući da su njih izradili inženjeri i programeri. U oba slučaja, procesi koji se događaju na nekoj vrsti molekularnog nivoa su zapravo dio nekog obrasca. Korisno je smatrati da se unutar tih obrazaca zapravo služimo simbolima. Searle nam kaže da simboli Deep Bluea nemaju značenje. Što zapravo "znači" pijun ili skakač? To je beskorisno pitanje.

Searle naveliko naglašava da Deep Blue zapravo "ne zna" da ono igra šah. Dapače, on inzistira da računalo ne zna ništa. Međutim, profesionalni inženjer bi vjerojatno inzistirao da Deep Blue zna mnogo toga. Na primjer, zna na koje se kocke s određene pozicije može pomaknuti lovac. Osnovno pitanje je što zapravo znači "znati". Bilo kako bilo, možemo se složiti da Deep Blue zapravo ne zna da igra šah. Možemo li stoga zaključiti da ne igra šah? Evo još jedne parabole:

Antropolozi koji su proučavali narod Xlupu na sjeveru Nove Gvineje došli su do zadivljujućeg otkrića jedne od svakako naj-

sjajnijih podudarnosti svih vremena. Iako su Xlupui živjeli potpuno izolirano sve do ove godine, čini se da njeguju jedan religijski obred u kojem parovi sudjeluju u simboličkom ritualu koji je potpuno jednak našoj partiji šaha. Ne koriste se šahovskom tablom i figurama, već izrađuju malene zamršene nacрте u pješčanim kutijama. Dr. Splendid, vođa antropološke ekspedicije koja je otkrila narod Xlupu, i sâm je strastveni šahovski amater i samo zato je u nacртima na pijesku uspio prepoznati poteze jednake onima koji se odigravaju u šahovskoj partiji.

Igraju li Xlupui šah? Oni sigurno *ne znaju* da to čine. Ah! Searle bi mogao odgovoriti: "Ali Xlupu su svjesni, a Deep Blue nije." Vrlo važno mjesto u Searleovim i drugim raspravama zauzimalo je pitanje može li programirano računalo ikada postati svjesno. Bez obzira na to što donese budućnost, moramo se složiti s tim da Deep Blue nije svjestan.

Svoju jedinstvenu individualnost doživljavamo većinom kroz svijest. No, to znamo samo iznutra. Doživljavamo samo vlastitu svijest, a ne ničiju drugu. Ja svoju svijest doživljavam u obliku unutarnjeg dijaloga. Moja žena me uvjerava kako u njezinoj svijesti prevladavaju vizualne predodžbe. Jesu li naše dvije svijesti jedna te ista stvar? Što je svijest i čemu služi? Dok pišem, tražim pravu riječ i kad mi se posreći, ona mi se pojavljuje u svijesti iz dubina moga bića. Nemam pojma kako moj mozak uspijeva napraviti nešto tako pametno. Istina o tome je vrlo jednostavna. Fenomen svijesti u ovom trenutku još je uvijek tajna.

I Turing i von Neumann su imali dobre razloge zbog kojih su počeli uspoređivati računala s ljudskim mozgom. Znajući da su ljudi sposobni razmišljati na jako puno načina, pretpostavili su da možemo napraviti toliko različitih stvari zato što je u naš mozak ugrađeno univerzalno računalo. Upravo se zato, dok se spremao konstruirati EDVAC, von Neumanna toliko dojmila teorija umjetnih neurona. Univerzalna računala rješavaju algoritme.

Searle kaže "od svega što ljudi čine, jako malo toga je čisto računanje. Jako malo svog vremena trošimo na rješavanje algoritama". Je li on siguran da je tome baš tako? Kad nas netko pita: "Jeste li ikada pročitali neko djelo Charlesa Dickensa?", odgovor da ili ne dolazi izvirući iz dubina. Nemamo pojma kako to činimo. Na prvi pogled, sasvim nam se privlačnom čini hipoteza o tome da to radimo pomoću nekog algoritamskog procesa koji pristupa traženim informacijama iz određenih baza podataka u našem mozgu. Istraživanje računalne obrade vizualnih podataka, koji u računalo dolaze s jedne ili više televizijskih kamera, jako podsjeća na postupak potreban da se od neobrađenih podataka, koji od mrežnice oka idu ka mozgu, proizvede oštra slika koju nam prikazuje naš mozak. Ne znamo da takve stvari radimo pomoću algoritama koje naš mozak rješava, ali isto tako ne znamo ni da ih tako ne radimo.

Roger Penrose, izvanredan matematičar i matematički fizičar, autor je zanimljivih radova iz područja geometrije svemira, a razmatrao je i pitanje o tome djeluje li ljudski mozak na algoritamskoj osnovi. Pozivajući se na Gödelov teorem o nepotpunosti, Penrose je odgovorio izričito negativno. Gödelov teorem može se izraziti na sljedeći način:

Ako postoji algoritam koji uzastopno proizvodi istinite iskaze o prirodnim brojevima, uvijek možemo doći do drugog istinitog iskaza o prirodnim brojevima koji nije nastao pomoću tog algoritma. Nazovimo taj iskaz Gödelovom rečenicom.⁶

Penrose tvrdi da nijedan predloženi algoritam nije i ne može biti ekvivalentan djelovanju uma, jer mi činom svogu "uvida" uočavamo da je Gödelova rečenica tog algoritma istinita. Ta je tvrdnja pogrešna iz razloga koje je već četiri desetljeća prije nego li je o tome pisao Penrose (vidi str. 217–217), objasnio Turing u svom predavanju Londonskom matematičkom društvu 1947. godine. Turing je tada upozorio na to da je Gödelov teorem primjenjiv samo

na algoritme koji proizvode isključivo istinite rečenice. Nijedan matematičar ne može tvrditi da je nepogrešiv. Svi griješimo! Stoga u Gödelovu teoremu nema ničega što bi spriječilo mogućnost da matematičke sposobnosti ljudskog uma budu jednake algoritamskim procesima koji proizvode kako neistinite, tako i istinite rečenice.⁷

Searle i Penrose odbacuju postavku da je ljudski um ekvivalentan računalu u bilo kojoj bitnoj značajki. Međutim, i jedani drugi prešutno prihvataju premisu da, što god ljudski um bio, njega stvara ljudski mozak koji podliježe fizikalnim i kemijskim zakonima. Za razliku od njih, Kurt Gödel je bio spreman vjerovati da je mozak zapravo računalo, ali je odbacivao ideju da ne postoji um s onu stranu onoga što ljudski mozak čini. Većina čitatelja će u jezgri Gödelovih razmišljanja prepoznati klasični problem odnosa duha i tijela. Njegov stav, da je duh na neki način nezavisan od našeg postojanja kao fizičkih bića, obično se naziva kartezijanski dualizam.⁸

Ova nas je rasprava odvela daleko od Leibnizova sna, u područje između filozofije i znanstvene fantastike. Sigurno je da, ako uzmemo u obzir ono što se dogodilo s računalima od dana izvještaja o EDVAC-u i ACE-u, treba biti oprezan u predviđanjima onoga što će računala budućnosti moći, a što neće moći izvesti.

Epilog

Kroz tri stoljeća pratili smo živote briljantnih inovatora. Svatko od njih se na ovaj ili onaj način bavio prirodom ljudskog razmišljanja. Svi su doprinijeli intelektualnoj matrici iz koje je na svijet izašlo svenamjensko digitalno računalo. Nitko osim Turinga nije pretpostavljao da bi njegov rad mogao biti primijenjen na takav način. Leibniz je vidio daleko, ali ne tako daleko. Boole teško da mogao zamisliti da će se njegova algebra logike koristiti za nacрте složenih električnih strujnih krugova. Frege bi bio oduševljen da zna da su logička pravila jednaka njegovima dio računalnih programa koji izvršavaju dedukcije. Sigurno je da Cantor nije predviđao da će se njegova dijagonalna metoda tako razgranati. Hilbertov program za očuvanje temelja matematike bio je potpuno drugačije usmjeren. A Gödel, Gödel je živio vlastiti duhovni život i teško da je pomišljao o primjenama u mehaničkim napravama.

Ova priča naglašava moć ideja i jalovost predviđanja njihovih posljedica. Vojvode od Hannovera su smatrale da znaju kako Leibniz treba trošiti svoje vrijeme: u radu na povijesti njihove obitelji. Oni koji znanstvenicima omogućuju sredstva potrebna za njihov život i rad, i danas ih često pokušavaju usmjeriti tamo gdje će najvjerojatnije brzo doći do rezultata. Ne samo se to kratkoročno pokazuje jalovim, nego će, što je još važnije, nepoticanjem istraživanja koja nisu brzo isplativa, zapravo i sami u budućnosti dobiti manje.

Bilješke

Sve reference u uglatim zagradama odnose se na poglavlje Bibliografija koje slijedi.

Uvod

¹Citat je iz [Ceruzzi], str. 43. Howard Aiken (1900–1973) je osnovao Računalni laboratorij Harvard i pomogao je u stvaranju nacrtu, te pri izradi većih računalnih strojeva na Harvardu četrdesetih i ranih pedesetih godina dvadesetog stoljeća.

²Citat je iz govora Londonskom matematičkom društvu [Turing 1], str. 112. Alan Turing je tema sedmog i osmog poglavlja ove knjige.

Prvo poglavlje

¹Informacije iz Leibnizove biografije uglavnom sam crpio iz [Aiton].

²Leibnizovu *Dissertatio de Arte Combinatoria* (nažalost na latinskom) vidi u [Leibniz 1].

³Leibnizovim matematičkim radom u Parizu bavio se [Aiton], odnosno nešto više [Hofmann].

⁴Citat iz [Leibniz 3].

⁵O Leibnizovim spisima o mehanizmima zaključivanja i rješavanja jednadžbi vidi [Couturat], str. 115.

⁶Čitatelji koje zanimaju matematički detalji razvoja diferencijalnog računa Newtona i Leibniza i njihovih prethodnika uživat će čitajući [Edwards]. Čitatelje upućujemo i na [Bourbaki], str. 207–49 u kojem će naći izvrstan prikaz povijesnog razvoja diferencijalnog računa.

⁷Postoji jedna zanimljiva priča o Leibnizovu diferencijalnom i integralnom računu, no ona bi mogla biti tema neke druge knjige. To je priča o Leibnizovu sistematskom korištenju *in finitezimalnih* brojeva. Infinitesimali su navodno tako sićušni pozitivni brojevi, da bez obzira na to koliko puta taj broj dodamo njemu samome, nikada nećemo dosegnuti broj 1, čak ni broj .0000001. Opravdanost takvih veličina osporavali su od samog početka. Filozof biskup Berkeley ismijavao je infinitezimale, nazivajući ih “duhovima nekadašnjih veličina”. Do kraja devetnaestog stoljeća matematičari su se složili da se upotreba infinitezimala ne može smatrati ispravnom. Usprkos tome, fizičari i inženjeri su ih i dalje upotrebljavali. O raspravi o infinitezimalnim metodama koje je koristio Leibniz i o Abrahamu Robinsonu koji ih je ponovo počeo proučavati u dvadesetom stoljeću, vidi u [Edwards]. Prikaz Robinsonova dostignuća dan je i u članku objavljenom u časopisu *Scientific American* [Dav-Hersh 1].

⁸[Aiton], str. 53.

⁹[Mates], str. 27. Vidi i stranice 26–27 u istoj knjizi. Tu se više govori o tim sjajnim ženama i o Leibnizovu stavu o intelektualnim sposobnostima žena, a djelo sadrži i druge informacije.

¹⁰Citirano pismo L'Hospitala nosi datum 28. travnja 1963. [Couturat], str. 83. Citat iz Couturata nalazi se na istoj stranici istog izvora. O “Arijadninoj niti” vidi [Bourbaki], str. 16.

¹¹Leibnizovo pismo Jean Galloys [Leibniz 2] o univerzalnoj karakteristici nosi datum od prosinca 1678. Prijevod s francuskog je moj.

¹²[Gerhardt], sv. 7, str. 200.

¹³[Parkinson], str. 105.

¹⁴O Leibnizovu logičkom računu, čiji je manji dio ovdje prikazan, vidi u [Lewis], str. 297–305. Leibniz je koristio simbol ∞ umjesto simbola $=$. Zanimljiv članak [Swoyer] daje potpun prikaz tog sustava iz perspektive dvadesetog stoljeća.

¹⁵O nekim raspravama o Leibnizovim pokušajima da nadide Aristotelovu analizu vidi [Mates], str. 178–83.

¹⁶[Huber], str. 267–69.

¹⁷[Aiton], str. 212.

Drugo poglavlje

¹Podatke o Leibnizovu prijateljstvu s princezom Karolinom i o njegovom dopisivanju sa Samuelom Clarkeom, crpio sam iz [Aiton], str. 232, str. 341–46, te iz članka “Caroline (1683–1737)” i “Clarke, Samuel (1675–1729)” u [Britannica].

²Podaci o biografiji Georgea Boolea većinom su iz [MacHale].

³[MacHale], str. 17–19.

⁴“Gross appetites and passions”: [MacHale], str. 19.

⁵[MacHale], str. 30–31.

⁶[MacHale], str. 24–25.

⁷[MacHale], str. 41.

⁸Među najznačajnije zakone algebre spadaju zakoni *komutativnosti* za zbrajanje i množenje:

$$x + y = y + x \quad xy = yx$$

i zakon *distributivnosti*

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Koristimo uobičajeno algebarsko pisanje, na primjer xy umjesto $x \times y$.

⁹Množenje dvaju diferencijalnih operatora, primjenom prvo jednog, a zatim drugog, ne podliježe uvijek zakonu komutativnosti.

¹⁰Booleova zlatna medalja: [MacHale], str. 59–62, str. 64–66. Boole je radio na upotrebi metoda diferencijalnog računa. Osim toga, 1842. je objavio i esej u dva dijela u časopisu *Cambridge Mathematical Journal*. Smatra se da je time utemeljena nova, važna grana algebre, teorija algebarskih konstanti. Konstantama ćemo se ponovo baviti u poglavlju o Davidu Hilbertu.

¹¹Boole se u vezi s dokazom vezanim uz limese ponašao ležerno. Tada su se na kontinentu događale upravo suprotne stvari. Pokušavalo se doći do odgovarajućeg točnog utemeljenja istog dokaza. Čitatelji koje to zanima neka pročitaju [Edwards], posebno jedanaesto poglavlje.

¹²Škotskog filozofa sir Williama Hamiltona ne treba brkati s njegovim suvremenikom, irskim matematičarom sir Williamom Rowanom Hamiltonom.

¹³[Boole 2], str. 28–29.

¹⁴[Daly], [Kinealy].

¹⁵[MacHale], str. 173.

¹⁶[MacHale], str. 92.

¹⁷[MacHale], str. 107.

¹⁸[MacHale], str. 224–43.

¹⁹[MacHale], str. 111.

²⁰[MacHale], str. 252–76.

²¹Moderna notacija za presjek x i y je $x \cap y$, a ne xy . Slično, prazan skup se obično predstavlja danskim slovom $\emptyset$, a ne s 0. Jasno je da je njegova notacija bila važna za Boolea, jer je ona omogućila da se lakše uspostave veze s uobičajenom algebrom.

²²Boole je operaciju $+$ ograničio na klase koje nemaju zajedničkih elemenata. Mi se ovdje služimo uobičajenom upotrebom te operacije i ne rabimo takvo ograničenje. Stoga smatramo da je $x + y$ klasa predmeta koji pripadaju x -u ili y -u ili i jednom i drugom. Danas govorimo o uniji x i y , a to pišemo kao $x \cup y$. Boole je notaciju $x - y$

ograničio na slučaj u kojem je klasa koju predstavlja y dio klase koju predstavlja x . No, nema potrebe ni za takvim ograničenjem.

²³[Boole 2], str. 49.

²⁴Kao što naglašava Boole, u dokazivanju valjanosti silogizama algebarski se zapravo bavimo *eliminacijom* jedne varijable iz dviju paralelnih jednadžbi s tri varijable.

Boole je jako dobro razumio da se iskazi oblika "Svi X su Y " u njegovoj algebri predstaviti mogu kao $X(1 - Y) = 0$. Pa ipak, on je radije koristio $X = vY$, gdje je v nazivao *neodređenim simbolom*. Izgleda da mu to predložio matematičar Charles Graves ([MacHale], str. 70). Bila je to doista loša zamisao i posve nepotrebna komplikacija Booleova sustava.

²⁵Booleova metoda povezivanja sekundarnih iskaza s algebrom klasa, uvela je u igru *vrijeme*. Boole bi povezao klasu slučajeva vremena za koje je određen iskaz istinit sa svakim pojedinim iskazom. Ako želi reći da je iskaz X istinit, piše $X = 1$, što bi značilo da klasa slučajeva za koje je iskaz istinit uključuje sva vremena koja se tu spominju. Slično, $X = 0$ izražava da je X neistinit, jer nema slučajeva vremena za koje je X istinit. Ako imamo iskaz $X \& Y$ koji izražava istinitost i iskaza X i iskaza Y , skup slučajeva u kojem je on istinit samo je presjek skupa XY . Konačno, da bi iskaz *ako X onda Y* bio istinit, nužno je da uvijek kada je X istinit i Y bude istinit, odnosno da nikad nije slučaj da je iskaz X istinit, a iskaz Y neistinit. To možemo prikazati u obliku jednadžbe $X(1 - Y) = 0$. ([Boole 2], str. 162–64.)

²⁶[Boole 2], str. 188–211.

Treće poglavlje

¹Russelovo pismo, Fregeov odgovor i Russellov kasniji komentar, vidi u [van Heijenoort], str. 124–28.

²Fregeov zloglasni dnevnik i komentar Michaela Dummetta, vidi u [Frege 2].

³Puno dugujem profesoru Lotharu Kreiseru sa Sveučilišta u Leipzigu koji je ljubazno odgovorio na molbu da mi pomogne oko informacija o Fregeu. Profesor Kreiser mi je izašao u susret iako je tada bio veoma zaposlen oko problema koji su nastali nakon ujedinjenja Njemačke. Pomogla mi je i kratka biografija Terralla Bynuma [Bynum].

⁴[Craig] mi je izvršno poslužio kao izvor za njemačku povijest. O počecima Prvog svjetskog rata vidi u [Geiss] i [Kagan]. Sačuvano je nekoliko razglednica koje je Frege slao filozofu Ludwigu Wittgensteinu. Wittgenstein je bio artiljerac u austrijskoj vojsci za vrijeme rata. Ne iznenađuje što se iz pisama vidi da je Frege bio veoma domoljubno nastrojen Nijemac [Frege 1].

⁵[Frege 2].

⁶Ibid.

⁷[Sluga], [Frege 1], str. 8–9.

⁸Citirani komentar vidi u [van Heijenoort], str. 1. Isti izvor sadrži i izvrstan engleski prijevod Fregeova *Begriffsschrift* s komentarima, str. 1–82. Još jedan engleski prijevod je u [Bynum], str. 101–66.

⁹Mi koristimo simbole koji su danas uobičajeni, a ne one koje je koristio Frege. Sasvim je jasno je da je najvažnije bilo prepoznati što treba simbolizirati, a ne koji su za to simboli korišteni. Fregeovi simboli nisu široko prihvaćeni, djelomično zato što su predstavljali problem za slagare, a većim dijelom zato što je notacija koju je koristio talijanski logičar Giuseppe Peano, a prilagodio Bertrand Russell, postala puno poznatija.

¹⁰Frege je pisao “Nisam htio stvoriti puki *calculus ratiocinator*, već *lingua charactera* u Leibnizovom smislu”. Citirano u [van Heijenoort], str. 2. Vidi i [Kluge].

¹¹Ovo pravilo poznato je kao *modus ponens*. Ta terminologija je preuzeta od skolastičkih logičara dvanaestog stoljeća.

¹²Ono što mi zovemo Fregeovom logikom, obično se naziva *logikom prvoga reda*. To radimo kako bismo je razlikovali od sustava logike u kojima se kvantifikatori $\forall$ i $\exists$ primjenjuju na svojstva, ali i na poje-

dinačne predmete. Evo primjera rečenice u onome što podrazumijevamo pod pojmom *logike drugog reda*:

$$(\forall F)(\forall G)[(\forall x)(F(x) \supset G(x)) \supset (\exists x)(F(x) \supset (\exists x)G(x))].$$

Frege zapravo otišao dalje od logike prvog reda te se bavio i kvantifikacijom svojstava. Utoliko nije sasvim precizno govoriti o logici prvog reda kao o "Fregeovoj logici".

¹³Strogo uzevši, ovo objašnjenje pojma "broj" bliže je onome koje je predlagao Bertrand Russell nego onome o kojem je govorio Frege. No, i to je dovoljno precizno da se pokaže zašto ga je Russellov paradoks uspio raniti.

¹⁴Dok sam pisao ovu knjigu, pojavili su se zanimljivi radovi koji su pokazali da se može spasiti značajan dio Fregeova programa logičkog razvoja aritmetike [Boolos].

¹⁵[Frege 3].

¹⁶[Dummett], [Baker-Hacker].

¹⁷Upravo je zbog jasnoće važno točno navesti značenja izraza koji se javljaju u programskim jezicima, odnosno dati *semantiku* takvog jezika. Jedan pokušaj da se to učini bila je *denotacijska semantika*, koja se temelji na Fregeovim idejama. Vidi [Dav-Sig-Wey], str. 465–556.

Četvrto poglavlje

¹[Rucker], str. 3.

²Citat iz [Dauben 1], str. 124. To je prijevod Leibnizova teksta izvorno napisanog na francuskom jeziku, [Cantor 1], str. 179.

³[Dauben 1], str. 120.

⁴[Frege 4], str. 272. Ovo je navod iz Fregeove recenzije nekih Cantorovih djela. O toj recenziji govorit ćemo kasnije u ovom poglavlju.

⁵Biografske podatke o Cantoru crpio sam iz [Grattan-Guinness], [Purkert-Ilgauds] i [Meschkowski].

⁶[Meschkowski], str. 1 (moj prijevod).

⁷Veliko zanimanje matematičara početkom devetnaestog stoljeća pobudilo je iznenađujuće otkriće francuskog matematičara Fouriera, da ograničenja onoga čemu trigonometrijski nizovi teže gotovo da i nema. Evo jednog primjera trigonometrijskog niza

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots$$

Zanimljivo je da se taj niz približava nizu $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{6}\pi^2$ ako x ima vrijednost između 0 i 2π , ("kut" x se mjeri u radijanima). Ako je x skup jednak 0, dobivamo niz

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \dots$$

a taj rezultat povezuje π s prirodnim brojevima, upravo poput Leibnizova niza za $\frac{\pi}{4}$, u ovom slučaju sa savršenim kvadratima:

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9, 4 \times 4 = 16, 5 \times 5 = 25, \dots$$

⁸[Euklid], str. 232.

⁹[Gerhardt], sv. 1, str. 338. S latinskoga preveo Alexis Manaster Ramer.

¹⁰Kao što smo svi učili u osnovnoj školi, različiti razlomci mogu predstavljati isti broj, na primjer

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$$

Prikazano pridruživanje jedan na jedan između razlomaka i prirodnih brojeva je pridruživanje *s razlomcima kao simbolima*, a ne s brojevima koje ti simboli predstavljaju. Tu poteškoću ćemo lako razriješiti: samo maknite s popisa razlomaka sve one koji nisu u najnižim članovima niza.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= .0100000000 \dots, \\ \frac{1}{3} &= .0101010101 \dots, \\ \frac{1}{\pi} &= .0101000101 \dots, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} &= .1011010100 \dots\end{aligned}$$

Kad smo napisali $\frac{1}{3} = .0101010101\dots$, to znači

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots.$$

(Nazivnici su nizovi potencija broja 2, a ne 10.)

Za bilo koji skup prirodnih brojeva možemo pronaći odgovarajući niz nula i jedinica, tako da na n -to mjesto pišemo 1 ako je n član danog skupa, a ako nije pišemo 0. Na primjer, ako krenemo od skupa parnih brojeva, završit ćemo s $.01010101\dots$, odnosno, kao što smo vidjeli, s $\frac{1}{3}$. Ako pak počnemo od skupa neparnih brojeva, dobit ćemo $.10101010\dots = \frac{2}{3}$.

Iz toga je vidljivo da skup svih skupova prirodnih brojeva ima isti kardinalni broj kao i skup realnih brojeva između 0 i 1. No, Cantor je uspio dokazati da taj skup ima isti kardinalni broj kao skup svih realnih brojeva. To nije teško dokazati.

Postoji jedna mala tehnička poteškoća koju moram spomenuti. Pojedini racionalni brojevi će imati dva različita binarna prikaza i zato će biti pridruženi s dva različita skupa prirodnih brojeva. Evo jednog primjera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= .1000000\dots \\ &= .0111111\dots\end{aligned}$$

Dakle, realni broj $\frac{1}{2}$ odgovara i skupu koji sadrži samo broj 1 i skupu

koji sadrži sve prirodne brojeve osim broja 1. No, činjenica da dotični skup racionalnih brojeva ima kardinalni broj $\aleph_0$, omogućuje nam da tu poteškoću prevladamo.

¹⁶Kao što je i Cantor istaknuo, kardinalni brojskupa svih skupova realnih brojeva je ujedno i kardinalni broj skupa svih *funkcija* od realnih brojeva ka realnim brojevima.

¹⁷Vidi [Grattan-Guinness] i [Dauben 1]. Dr. Barbara Rosen mi je ljubazno dala svoje profesionalne savjete vezane uz ovu problematiku.

¹⁸Zahvaljujem Michaelu Friedmannu na pomoći oko Kanta i ostalih područja vezanih uz njega. To ne znači da je on odgovoran i za moje napade na Hegela.

¹⁹[Cantor 1], str. 382.

²⁰[Frege 4]. Zahvaljujem Egonu Börgeru, Williamu Craigu, Michaelu Richteru i Wilfriedu Siegu na pomoći kod prevođenja ovog ulomka, kao i ulomka citiranog u prethodnoj bilješki.

Peto poglavlje

¹Informacije o Hilbertu sam crpio iz biografije [Reid], biografskog eseja Otta Blumenthala [Hilbert], str. 388–429 i nekrologa Hermanna Weyla [Weyl].

²Mnogim čitateljima poznata je činjenica da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. U prošlom smo poglavlju objasnili da to znači da ga se ne može prikazati u obliku razlomka s prirodnim brojem kao brojnikom ili nazivnikom, odnosno da u njegovom decimalnom prikazu nema ponavljanja. Uz pomoć te činjenice možemo dati elegantan *nekonstruktivan dokaz* sljedećeg teorema: *Postoje takvi iracionalni brojevi a i b , za koje je broj a^b racionalan.*

U izvođenju tog dokaza, kao broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ neka stoji slovo q . Broj q mora biti ili racionalan ili iracionalan. Ako je broj q racionalan, ono što smo željeli dokazati dobit ćemo ako uzmemo da je $a = b = \sqrt{2}$. Ako je q iracionalan, uzet ćemo da je $a = q$ i $b = \sqrt{2}$. Zatim,

$$a^b = q^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2;$$

pa opet imamo iracionalan broj s iracionalnim eksponentom, što daje racionalan broj. Dokaz je nekonstruktivan zato što ne daje određene brojeve a i b koji bi zadovoljili teorem, nego dvije zasebne mogućnosti, od kojih jedna mora zadovoljiti. (Broj q zapravo jest iracionalan, ali lak dokaz te činjenice nije poznat.)

³U teoriji algebarskih konstanti posebno su zanimljive bile takozvane unimodularne transformacije, koje imaju ovaj oblik: u izrazu $(px + q)/(ry + s)$, gdje je y nova nepoznanica, a p, q, r, s su određeni brojevi odabrani tako da vrijedi $ps - rq = 1$ ili -1 , u jednadžbi se supstituira nepoznata veličina (recimo x). Boole je otkrio da je za opću kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$, u kojoj a, b, c mogu predstavljati bilo koji broj, izraz $b^2 - 4ac$ (zvan *diskriminanta* jednadžbe) *konstanta* takvih transformacija temeljenih na jednom elementu, u sljedećem smislu:

Nakon što napravimo navedenu zamjenu u danoj kvadratnoj jednadžbi i skratimo razlomke, u nepoznanici y dobivamo novu kvadratnu jednadžbu. Tu jednadžbu možemo pisati kao $Ay^2 + By + C = 0$, gdje A, B, C ovise o veličini svih varijabli a, b, c, p, q, r, s . Vrijednost $b^2 - 4ac$ je konstanta u smislu da nova jednadžba ima istu diskriminantu kao i prethodna, a ona je $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$.

Bez posebnog uvjeta $ps - rq = \pm 1$, odnos između dviju diskriminanti je

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(ps - rq)^2.$$

Čitateljima koji to sami žele izračunati savjetujemo da krenu od jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

pri čemu su x_1 i x_2 dva korijena jednadžbe. Neka dalje koriste kvadratnom formulom,

$$b^2 - 4ac = 4a^2(x_1 - x_2)^2.$$

⁴U nekrologu [Weyl], Herman Weyl piše:

Otkrivanjem novih ideja i uvođenjem uspješnijih metoda, ne samo da je zaista algebru doveo na razinu na koju su je doveli Kronecker i Dedekind, već je bio i tako temeljit da je zapravo gotovo dovršio posao. . . Svoj rad *Über die vollen Invariantensysteme* ponosno je završio riječima: "Stoga smatram da su dosegnuti najvažniji ciljevi teorije [algebarskih] konstanti." Time je završio s radom na tom području.

⁵Klasična teorija brojeva bavi se važnim odnosima i oblicima prirodnih brojeva 1, 2, 3, . . . i pitanjima koja uključuju proste brojeve i djeljivost. Neka od tih pitanja spadaju u područje algebarske teorije broja, koje je nastalo dodavanjem određenih algebarskih jednadžbi korijenima cijelih brojeva (realnih ili kompleksnih). Gauss je radio s korijenima oblika $m + n\sqrt{-1}$, gdje su m, n obični cijeli brojevi. Otkrio je koji su od tih "Gaussovih cijelih brojeva" prosti i dokazao da teorem po kojem brojevi mogu biti rastavljeni na proste faktore samo na jedan način, vrijedi za te brojeve jednako kao i za obične cijele brojeve. Ako se pak, bavimo brojevima oblika $m + n\sqrt{10}$, vidjet ćemo da za njih to ne vrijedi. Slijedi jedan protuprimjer

$$6 = 2 \cdot 3 = (2 + \sqrt{10})(-2 + \sqrt{10}),$$

kod kojeg se može pokazati da su $2, 3, 2 + \sqrt{10}$ i $-2 + \sqrt{10}$ prosti brojevi pa tu jedinstveno rastavljanje nije moguće. Cantorov prijatelj Dedekind i njegov nemeza Kronecker su obnovili postupak rastavljanja na proste faktore. Oni su uzeli u obzir ono što se kasnije nazivalo prostim idealima. Hilbert i njegov prijatelj Hurwitz su šetali i raspravljali o tim konkurentskim pristupima. Složili su se da su oba *scheusslich* (užasni), dok je postupak u Hilbertovom *Zahlbericht* elegantan.

⁶[Hilbert], str. 400, 401.

⁷Hilbert u predavanju nije stigao izložiti sva dvadeset i tri problema pa ih je izložio samo nekoliko. Svi problemi navedeni su u [Browder],

str. 1–34 u engleskom prijevodu Mary Winston Newson.

⁸Vidi [Browder]. (Ja sam jedan od autora članka o desetom problemu.)

⁹Detaljan citat nalazi se na kraju četvrtog poglavlja.

¹⁰[van Heijenoort], str. 129–38.

¹¹[Poincaré], treće poglavlje.

¹²Ibid.

¹³Ibid.

¹⁴Tehnički termin za Russellove “detaljne i neprikladne” slojeve je “ramificirana teorija tipova”.

¹⁵Kao i u Fregeovom *Begriffsschriftu*, osnovno pravilo zaključivanja u *Principia Mathematica* kreće od para formula oblika $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$ ka odgovarajućoj formuli $\mathcal{B}$. To pravilo je poznato kao *modus ponens* ili *pravilo odvajanja*. Frege je tu bio sasvim jasan, dok su Whitehead i Russell zakomplicirali situaciju. Oni su to pravilo izrazili kao svoj “primitivni iskaz”: *Sve što istinit iskaz implicira je istinito*. ([White-Russ], str. 94).

¹⁶[Brouwer 2].

¹⁷Brouwerova doktorska disertacija napisana je na nizozemskom jeziku. Engleski prijevod nalazi se u [Brouwer 1], str. 13–97.

¹⁸[van Stigt], str. 41.

¹⁹Citat je iz Brouwerove disertacije [Brouwer 1], str. 96.

²⁰U danom primjeru nekonstruktivnog dokaza imamo iskaz “ q mora biti ili racionalno ili iracionalno”. U njemu se koristi zakon isključenja trećeg.

²¹Weylu je smetalo što su Cantor i Dedekind upotrebljavali takozvane *impredikativne* definicije. Nešto smatramo impredikativnim ako je definirano kao skup čiji je član predmet koji definiramo. Filozofsko stajalište po kojem se objekti u matematici stvaraju postupno, smatra da je takva definicija nevaljala jer se dotični skup ne može sastaviti prije bilo kog svog elementa. Suprotno filozofsko stajalište smatra da matematički objekti već postoje. Definicije ih samo navode, ne sačinjavaju ih. Primjer toga možemo vidjeti u sljedećem opisu: “Matilda

je najviša osoba u sobi". Takvo filozofsko razmišljanje zove se platonizam, a ono je za Weyla bilo neprihvatljivo.

²²To je dio govora koji je održan 1922. godine, prvo u Kopenhagenu, a zatim i u Hamburgu. Walter Flescher mi je ukazao na povezanost između Hilbertovog govora mržnje i činjenice da je u nekim periodima života jedva preživljavao. Čitav govor na engleskom jeziku može se naći u [Mancosu], str. 198–214. Smatram da je prijevod dobar, ali ne prenosi žar koji se osjeća u izvorniku. Pokušao sam ga prevesti bolje i pritom sam se služio s nekoliko prijevoda i izvornim tekstom ([Hilbert], str. 159–60).

²³[Reid], str. 137–138, 144, 145. O onome što se događalo oko manifesta njemačkih intelektualaca vidi [Tuchman], str. 322.

²⁴[Reid], str. 143.

²⁵[Hilbert], str. 146 (moj prijevod).

²⁶Postoji jedan zanimljiv esej koji govori o Hilbertovom programu u [Mancosu], str. 149–97. Vidi i [Sieg]. On daje temeljitu analizu razvoja Hilbertove misli, nastalu na osnovu neobjavljenih dokumenata. Zanimljive informacije o Bernayovim dostignućima vidi u [Zach]. VonNeumannov stav o intuicionizmu ad absurdum vidi u [Mancosu], str. 168. Treba spomenuti da iako Hilbertov opis metoda koje treba dopustiti kao "konačne" nikada nije potpuno jasno izražen, općenito se smatra da je on mislio dopustiti još manje metoda nego Brouwer.

²⁷[van Heijenoort], str. 373.

²⁸[van Heijenoort], str. 376.

²⁹[van Heijenoort], str. 336.

³⁰[Reid], str. 187.

³¹[van Stigt], str. 272.

³²[van Stigt], str. 110.

³³[van Stigt], str. 285–94, [Mancosu], str. 275–85.

³⁴O intuicionističkoj logici u računarstvu vidi [Constable].

³⁵[Hilbert], str. 378–87.

³⁶[Dawson], str. 69.

Šesto poglavlje

¹O Einsteinovom stavu o tome da je Gödel glasao za Eisenhowera vidi u [Dawson], str. 209. Imao sam sreću da mi je bila na raspolaganju ta sjajna Gödelova biografija. Služio sam se i kratkim zbornikom radova [Gödel-Symp] sa pozivnog simpozija o Gödelu u Salzburgu 1983. godine (na kojem sam imao čast prisustvovati). Georg Kreisel bio je Gödelov bliski prijatelj. Upravo je on napisao nekrolog [Kreisel] koji je pun zanimljivih detalja, ali nažalost, nije sasvim pouzdan. Logičar Solomon Feferman je napisao kratku ali dojmljivu biografiju u [Gödel], sv. I, str. 1–36.

²[Gödel], sv. III, str. 202–59.

³[Dawson], str. 58, 61, 66.

⁴[Gödel-Symp], str. 27.

⁵Izraz "Frege–Russell–Hilbertova simbolička logika" previše pojednostavljuje. Temeljna logika koju je izdvojio Hilbert, danas poznata kao logika prvog reda, samo je jedan dio Fregeova i Russellova sustava.

⁶O sljepoći logičara Gödel je govorio u [Dawson], str. 58. Čitav tekst Gödelove biografije kao i objavljene članke koji se na njoj temelje, možemo naći u [Gödel], sv. I, str. 60–123 na njemačkom jeziku i u engleskom prijevodu. Na početku se (str. 44–59) nalazi poučan uvod Burtona Drebenia i Jeana van Heijenoorta.

⁷Hilbertove konačne metode metamatematike često se smatraju "intuicionističkima". Vjerojatno je ono što je Hilbert imao na umu bilo još ograničenije od onoga što je dopustio Brouwer. Raspravu o toj problematici vidi u [Mancosu], str. 167–68.

⁸[Gödel], sv. I, str. 65.

⁹Kad se na početku decimalnog prikaza nekog prirodnog broja nalaze nule, taj se broj ne mijenja. Na primjer, $17 = 017 = 0017$ i tako dalje. Stoga su nizovi Ly i $,Ly$ i $.,Ly$ svi kodirani brojem 17. Nas ne zanimaju nizovi koji počinju zareзом pa nas ta dvosmislenost

ne zabrinjava. Tehnika koju je upotrebljavao Gödel nije koristila prikaz broja pomoću decimalnih znamenki za kodiranje nizova. No, ta činjenica nije od presudne važnosti. Gödel je koristio činjenicu da je rastavljanje prirodnih brojeva na proste faktore jedinstveno te je kodne brojeve pojedinih simbola pretvorio u eksponente odgovarajućih prostih brojeva. Evo jednog primjera. Niz $L(x, y)$ kodira se brojem 186079. Gödelov kodni broj bio bi $2^{13}3^85^67^{11}13^9$.

¹⁰Postoji nekoliko engleskih prijevoda tog epohalnog članka. Najbolji prijevodi su u [Gödel], sv. I, str. 144–45 i u [van Heijenoort], str. 596–616. Te prijevode je pohvalio i sâm Gödel. Prijevod [Gödel], sv. I, str. 144–45 tiskan je usporedo s njemačkim izvornikom. Čitatelji koje zanima način na koji je Gödel otkrio teorem o nepotpunosti, neka pogledaju [Dawson], str. 61.

¹¹Kako bi izbjegao korištenje filozofski sumnjivog termina "istina", Gödel je pribjegao jednoj tehničkoj zamjeni koju je nazvao omega-konzistentnost. Omega-konzistentnost je zapravo malo snažnija konzistentnost. Dakle, ispravna verzija teorema glasi: *ako je PM omega-konzistentan onda postoji iskaz U, takav da ni iskaz U ni iskaz $\neg U$ nisu dokazivi u PM*. Nekoliko godina kasnije J. B. Rosser je pokazao kako zamijeniti pretpostavku omega-konzistentnosti običnom konzistentnošću. U međuvremenu je učinjeno puno toga, a posebno je značajan rad Alana Turinga. O njemu ćemo govoriti u sljedećem poglavlju. Ti su radovi omogućili da Gödelove rezultate izrazimo u pristupačnijem obliku. Bez obzira na to koje aksiome dodamo PM-u, ako su oni specificirani nekim algoritmom i ako unutar njih ne možemo dokazati proturječe (tj. iskaz oblika $A \wedge \neg A$), postojat će iskaz U koji će u tom sustavu biti neodlučiv.

¹²Sustav PM je previše kompliciran da ga ovdje opisujemo. Zato ćemo pomoću jednostavnijeg sustava PA pokazati dijelove pomoću kojih sastavljamo neodlučive iskaze. PA možemo uspostaviti pomoću šesnaest simbola

$$\supset, \neg, \vee, \wedge, \forall, \exists, \underline{1}, \oplus, \otimes, x, y, z, ()', \doteq$$

Neobične verzije simbola $1, +, \times, =$ koriste se da bi se naglasilo kako su to s jedne strane puki simboli, a s druge da se podsjeti na značenje koje je za njih predviđeno. Slova x, y, z koriste se kao varijable koje bi imaju doseg prirodnih brojeva. Kako nam je često potrebno više od tri varijable, na raspolaganju nam je simbol $'$ pomoću kojeg možemo proizvesti onoliko varijabli koliko želimo, tako da ga dopišemo na druga slova. Tako su, dakle, y' i z''' varijable. Kako imamo više od deset simbola, koristiti ćemo shemu kodiranja u kojoj svaki simbol zamjenjujemo parom decimalnih znamenki:

$\supset$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\forall$	$\exists$	<u>1</u>	$\oplus$	$\otimes$	x	y	z	(	)	'	$\doteq$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	11	12	13	14	15	21	22	23	31	32	33	41	42	43	44

I prirodne brojeve predstavljamo određenim nizovima istih simbola, takozvanim *numeralima*, na sljedeći način:

numeral	predstavljani broj	kod
<u>1</u>	1	21
(<u>1</u> $\oplus$ <u>1</u>)	2	4121222142
((<u>1</u> $\oplus$ <u>1</u>) $\oplus$ <u>1</u>)	3	414121222142222142
(((<u>1</u> $\oplus$ <u>1</u>) $\oplus$ <u>1</u>) $\oplus$ <u>1</u>)	4	41414121222142222142222142
...		

Većina nizova sastavljenih od tih šesnaest simbola posve je besmislena, kao na primjer:

$$\exists \oplus \otimes x \forall \neg \quad \text{ili} \quad \doteq \supset \underline{1}' ()$$

čiji kodovi su 152223311411, odnosno 441021434142. Međutim, nekim od tih nizova, takozvanim *rečenicama*, možemo izraziti istinite ili neistinite iskaze o prirodnim brojevima. Tako niz

$$((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes (\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq (((\underline{1} \oplus \underline{1}) \oplus \underline{1}) \oplus \underline{1}))$$

čiji kôd je

414121222142234121222142444141412122214222214222214242

izražava iskaz da 2 pomnoženo s 2 daje 4, a

$$((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes (\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq ((\underline{1} \oplus \underline{1}) \oplus \underline{1}))$$

izražava neistinit iskaz da 2 pomnoženo s 2 daje 3. Rečenica

$$(\forall x)(\neg(x \doteq \underline{1}) \supset (\exists y)(y)(x \doteq (y \oplus \underline{1})))$$

čiji kôd je

4114314241114131442142104115324241314441322221424242

izražava iskaz da svaki prirodni broj osim 1 ima neposrednog pret-hodnika.

Da bismo završili opis sustava PA, moramo određene rečenice izdvojiti kao *aksiome* i dati pravila zaključivanja koja ćemo koristiti da bismo od aksioma došli do dokazivih rečenica. Taj postupak počinje od aksioma, a završava rečenicom dokazivom u PA i naziva se *dokazom* te rečenice. Detaljno razmatranje bi nas odvelo predaleko, ali pogledajmo jedan jednostavan primjer:

$$(\forall x)\neg(\underline{1} \doteq (x \oplus \underline{1}))$$

kojim se želi izraziti iskaz da 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja. Tu rečenicu možemo izabrati i kao aksiom. Budući da rečenice koje počinju simbolom $\forall$ izražavaju iskaze koji kažu da određeno svojstvo svijedi za *sve* prirodne brojeve, jedno prirodno pravilo izvođenja dopustit će nam da određeni broj zamijenimo s x (nakon što uklonimo univerzalni kvantifikator $(\forall x)$). Tu smo zapravo samo

primijenili opće pravilo na poseban slučaj. Evo jednog jednostavnog primjera:

$$\frac{(\forall x)\neg(\underline{1} \doteq (x \oplus \underline{1}))}{\neg(\underline{1} \doteq (\underline{1} \oplus \underline{1}))}.$$

Zaključak, rečenicu koja je dokaziva u sustavu PA a izražava činjenicu da 1 i 2 nisu jednaki, dobili smo supstitucijom simbola $\underline{1}$ varijablom x .

Osim nizova koji izražavaju iskaze, postoje i takozvani *unarni* nizovi kojima možemo definirati skup prirodnih brojeva. Takvi nizovi sadrže simbol x , ali ne sadrže "kvantifikatore" ($\forall x$) ili ($\exists x$). Oni mogu sadržavati kvantifikatore koji se odnose na druge varijabli kao što su y ili x'' . Osim toga, unarni nizovi imaju važno svojstvo da ako svaki x zamijenimo nekim brojem, dobiveni niz će biti rečenica. Evo jednog primjera unarnog niza:

$$(\exists y)(x \doteq (\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y))$$

čiji kôd je

41153242413144414112122214223324242.

Ako x zamijenimo numeralom $(\underline{1} \oplus \underline{1})$, dobit ćemo istinitu rečenicu

$$(\exists y)((\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq ((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y)).$$

Ako pak umjesto njega stavimo numeral $\underline{1}$, dobit ćemo neistinitu rečenicu

$$(\exists y)(\underline{1} \doteq ((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y)).$$

Taj unarni niz može se shvatiti kao definicija skupa parnih brojeva. Nešto složeniji unarni niz:

$$(\forall y)(\forall z)((x \doteq (y \otimes z)) \supset ((y \doteq \underline{1}) \vee (y \doteq x)))$$

čiji kôd je

4114324241143342414131444132233342421041413244-
1421241324431424242

definira skup koji sadrži broj 1 i sve proste brojeve. Za dani unarni niz A i prirodni broj n koristit ćemo notaciju $[A : n]$ umjesto *rečenice koju dobivamo zamjenom x u A numeralom koji predstavlja broj n* . Na primjer,

$$[(\exists y)(x \doteq ((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y)) : 2]$$

predstavlja rečenicu

$$(\exists y)((\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq ((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y)).$$

Sada možemo objasniti kako se Gödelove metode mogu koristiti za stvaranje rečenice U sustava PA koja izražava iskaz da ona sama nije dokaziva u PA. Ako unarnim nizovima pridružimo kodne brojeve, možemo ih rasporediti prema veličini koda. Unarni niz s najmanjim kodom je $(x \doteq \underline{1})$, a čak i njegov kôd je 4131442142, preko četiri milijarde. Ako taj unarni niz predstavimo s A_1 , zamislimo da su svi unarni nizovi poredani u niz

$$A_1, A_2, A_3 \dots$$

prema veličini njihova koda. Kako su to unarni nizovi, za svaki prirodni broj n, m , niz $[A_n : m]$ će biti rečenica. Neke od tih rečenica bit će dokazive u sustavu PA, a neke neće. Za svako n , možemo razmatrati skup vrijednosti m za koje iskaz $[A_n : m]$ *nije dokaziv* u PA. Prisjetimo li se naše rasprave o Cantorovoj dijagonalnoj metodi, vidjet ćemo da takav skup možemo smatrati paketom čija oznaka je n . Ako primijenimo dijagonalnu metodu, odnosno ako identificiramo oznaku s nekim elementom u paketu koji ona označava, dobivamo skup K koji se sastoji od brojeva n , takvih da iskaz $[A_n : n]$ *nije dokaziv* u PA.

Činjenica da se dokazivost u PA može definirati unutar PA, omogućuje nam da nađemo unarni niz B koji definira upravo taj skup K u PA. Mora, dakle, postojati neki broj q takav da $B = A_q$, zato što su svi unarni nizovi uključeni u niz A . Dakle, za svaki prirodni broj n , rečenica $[A_q : n]$ izražava iskaz

$[A_n : n]$ nije dokaziv u PA.

Dapače, ako n dobije vrijednost q , vidimo da $[A_q : q]$ izražava iskaz

$[A_q : q]$ nije dokaziv u PA.

Dakle, $[A_q : q]$ je rečenica sustava PA koja izražava iskaz da ona sama nije dokaziva unutar PA.

¹³Gödel je dokazao da se ni korištenjem čitave matematike sadržane u sustavu PM ne može dokazati konzistentnost sustava PM. Stoga je bilo prirodno očekivati da nema nade da se ostvari Hilbertov cilj da dokaže tu konzistentnost pomoću konačnih metoda koje je bio spreman dopustiti. Sigurno je to zaključio i von Neumann. Sâm Gödel nije bio sasvim uvjeren da je tomu tako. Nadao se da postoje neke metode dokaza koje nisu dozvoljene *unutar* sustava PM, a koje bi mogle biti prihvaćene kao konačne i koje bi dovele do dokaza konzistentnosti. Nekoliko desetljeća nakon Gödelova otkrića, razvile su se metode koje su gotovo udovoljile tom kriteriju. To je uzrokovalo velik razvoj istraživanja hilbertovske teorije dokaza. Usprkos tome, dokazani teoremi konzistentnosti nisu osigurali valjanost danih sustava.

¹⁴Programski jezici koji se najčešće koriste u industriji softvera, kao što su C i FORTRAN, često se opisuju kao *imperativni*. Razlog tome je što u programu napisanom u tim jezicima postoje redovi koje možemo smatrati *komandama* koje računalno mora izvršiti. Objektno orijentirani jezici, poput jezika C++, također su imperativni. U tzv. funkcijskim programskim jezicima, kakav je LISP, redovi u programu su zapravo

definicije operacija. Umjesto da naređuju računalu što da radi, oni *definiraju* što računalu treba omogućiti. Gödelov posebni jezik je zapravo vrlo sličan funkcijskom programskom jeziku.

¹⁵Vratimo se primjeru sustava PA i predloženom kodiranju da bismo proučili neka pitanja koja se odnose na prevođenje metamatematičkih pojmova u brojeve operacije. Prvo pitanje koje možemo postaviti je: ako imamo kodni broj nekoga niza, kako možemo odrediti dužinu toga niza? Budući smo odredili da jedan simbol ima dvije znamenke, odgovor je jednostavan: niz je dug onoliko koliko iznosi polovica broja znamenki koda. Za kodni broj r , duljinu odgovarajućeg niza pisat ćemo kao $\mathcal{L}(r)$. Ako imamo dva niza, uvijek možemo stvoriti novi niz tako da drugi niz smjestimo odmah iza prvoga. Slijedi pitanje: koji je kod tog novog niza, budući da znamo da dani nizovi imaju kodove r , odnosno s ? Odgovor nam daje formula $r10^{2\mathcal{L}(s)} + s$, budući da je pomnožiti r s njegovom potencijom od 10 jednako kao staviti iza r onoliko nula koliko s ima znamenaka. Gödel bi to pisao $r \cdot s$. Pretpostavimo sada da su r i s kodovi dviju rečenica. Koji je onda kod nove rečenice koju smo dobili stavljanjem simbola $\supset$ između r i s , odnosno stavljanjem rezultata u okrugle zagrade. Na tablici kodova ćemo vidjeti da je odgovor $41 \cdot r \cdot 10 \cdot s \cdot 42$. Na taj način ćemo sve složene matematičke zamisli izraziti pomoću aritmetičkih operacija.

¹⁶Kineski teorem ostatka nastao je u Kini u jedanaestom stoljeću. Ilustrirat ćemo ga sljedećim zadatkom: *pronađite broj koji kad ga podijelite sa 6 ima ostatak 2, a kad ga podijelite s 11 ima ostatak 5*. Nakon što malo razmislimo, vidjet ćemo da je to broj 38. Kineski teorem ostatka tvrdi da je uvijek moguće naći broj koji će imati određeni ostatak, ako ga podijelimo drugim brojevima, uz uvjet da među djeliteljima nema onih koji bi imali ijedan zajednički faktor (osim, naravno, broja 1). Tako na primjer, postoji broj koji ima ostatke 1, 6, 8, 5 za operacije dijeljenja s 3, 7, 10, 11. Ako pak 7 zamijenimo s 14, zaključak nam nije zajamčen jer djelitelji 14 i 10 imaju zajednički faktor 2. Gödel je vršio kodiranje pomoću kineskog teorema ostatka. Dugi niz brojeva

možemo označiti skupom djelatelja koji nemaju par s istim faktorom, već imaju jedan broj koji treba podijeliti sa svakim. Riječ "ostatak" lako možemo definirati u osnovnom jeziku aritmetike. To dalje možemo iskoristiti da bismo u tom jeziku izrazili odnose među nizovima prirodnih brojeva.

Gödelova tehnika korištenja kineskog teorema ostatka za kodiranje konačnih nizova prirodnih brojeva bila je važna i za moju karijeru. Dio moje doktorske disertacije (prihvaćene na Sveučilištu Princeton 1950.) bavio se desetim problemom s Hilbertove liste iz 1900. godine. Kineski teorem ostatka mi je pomogao da dobijem neke polovične rezultate. Kasnije sam radio s Hilaryjem Putnamom i s Juliom Robinson i služili smo se tim teoremom. Ruski matematičar Jurij Matijašević je 1970. godine napravio presudan korak u rješavanju Hilbertovog desetog problema. Tada je imao svega dvadeset godina. Čitatelji koje to zanima neka pročitaju članak [Dav-Hersh 2]. Članak je namijenjen široj publici.

¹⁷Cijeli tekst Carnapovog, Heytingovog i von Neumannovog govora iz Königsberga nalazi se u [Ben-Put], str. 41–65.

¹⁸Zapis Gödelovog sudjelovanja na okruglom stolu u Königsbergu na izvornom njemačkom i u engleskom prijevodu, kao i poučne komentare Johna Dawsona, vidi u [Gödel], sv. I, str. 196–203. Vidi i [Dawson], str. 68–71.

¹⁹[Dawson], str. 70.

²⁰[Goldstine], str. 174.

²¹Ibid.

²²To istraživanje uključuje velike transfinitne kardinalne brojeve i nadilazi područje kojim se bavi ova knjiga. Zanimljiv članak jednog od vodećih skeptika vidi u [Feferman].

²³[Dawson], str. 32–33, str. 227.

²⁴[Dawson], str. 34.

²⁵[Dawson], str. 111.

²⁶[Gödel-Symp], str. 27.

²⁷Najzanimljivija od tih otkrića odnose se na formalne sustave koje je razvio Brouwerov student Heyting, a ostvarena su s namjerom da obuhvate Brouwerove ideje o temeljima matematike. Iako je Brouwer i dalje smatrao da postoji točno definiran formalni jezik koji bi mogao poslužiti njegovim idejama, donekle je bio zainteresiran i za ono što je radio Heyting. Jedan Heytingov sustav, HA (Heytingova aritmetika), vrlo je sličan sustavu PA osim što se umjesto Fregeovih pravila koriste osnovna logička pravila koja su u skladu s onim što je Brouwer smatrao prihvatljivim. Prije svega, HA ne sadrži zakon isključenja trećeg. Gödel je otkrio jednostavan način da se sustav PA prevede u HA i to tako da HA, na određeni način, uključuje zakon isključenja trećeg, nasuprot mišljenju da je intuicionizam uži od klasične matematike. Štoviše, svaki dokaz konzistentnosti za HA odmah se prevodi u dokaz konzistentnosti za PA.

²⁸[Dawson], str. 103–6.

²⁹[Gödel-Symp], str. 20.

³⁰[Dawson], str. 142, 146.

³¹[Dawson], str. 91.

³²[Dawson], str. 147.

³³[Dawson], str. 143–45. str. 148–51.

³⁴[Dawson], str. 153.

³⁵[Browder], str. 8.

³⁶Gödel je, naime, pokazao da *ako* su sustavi poput PM-a ili sustavi koji se temelje na aksiomima teorije skupa konzistentni, oni će biti konzistentni i ako im se kao novi aksiom doda hipoteza o kontinuumu. Ako su sustavi konzistentni u njima se ne može opovrgnuti hipoteza o kontinuumu.

³⁷Ta bitka još traje. Ugledni logičar Solomon Feferman je u vrijeme dok sam pisao ovu knjigu napisao članak [Feferman] u kojem iznosi stav da je hipoteza o kontinuumu “vrlo nejasna”. Gödel u početku nije imao jednoznačan stav o tome, no kasnije je bio uvjeren da hipoteza o kontinuumu ipak ima nekog smisla, dapače da je taj iskaz savršeno

smislen i najvjerojatnije neistinit. Najnoviji radovi logičara W. Hugh Woodina ukazuju na to da je Gödel bio u pravu.

³⁸[Gödel], sv. II, str. 108, 186.

³⁹[Gödel], sv. III, str. 49–50.

⁴⁰[Gödel], sv. II, str. 140–41.

⁴¹[Gödel], sv. III sadrži gotovo sve neobjavljene Gödelove radove.

⁴²[Dauben 2]. O Gödelovoj nadi da će Robinson biti njegov nasljednik, str. 458. Citirano pismo vidi u istom izvoru str. 485–86.

⁴³[Dawson], str. 153, 158, 170–80, 245–53.

Sedmo poglavlje

¹[Huskey], str. 300.

²[Ceruzzi], str. 43.

³Imao sam sreću što je dostupna precizna i prelijepo napisana Turingova biografija Andrewa Hodgesa, vidi [Hodges].

⁴[Hodges], str. 29.

⁵Turing je osjećaje o svom mrtvom prijatelju izrazio vrlo živopisno: Alan je “obožavao tlo po kojem je Morcom gazio” i “kraj njega, svi drugi čine se tako obični”.

⁶[Hodges], str. 57.

⁷[Hodges], str. 94.

⁸Zapravo, Entscheidungsproblem Hilbert nije formulirao baš tako: on je htio pronaći postupak kojim bi se utvrdilo je li dani iskaz logike prvog reda valjan za svaku moguću interpretaciju. No, nakon što je Gödel dokazao teorem o potpunosti, postalo je jasno da je ta formulacija ekvivalentna Hilbertovoj.

⁹Problematika vezana uz Entscheidungsproblem često je uključivala izraze koje nazivamo *preneksne formule*. One sadrže logičke simbole $\neg \supset \wedge \vee \exists \forall$, takve da se sva pojavljivanja egzistencijalnih i univerzalnih kvantifikatora, $(\exists \dots)(\forall \dots)$, nalaze se na početku izraza

ispred drugih simbola. Bilo je lako dokazati da se Entscheidungsproblem može svesti na problem pronalaženja algoritma kojim bi se za određenu preneksnu formulu utvrdilo da li ju je *moгуće zadovolјiti*, odnosno postoji li način na koji bi se nelogički simboli u formuli mogli interpretirati tako da izražavaju istinitu rečenicu. Da bismo to pojasnili pogledajmo dvije preneksne formule

$$(\forall x)(\exists y)(r(x) \supset s(x, y)) \quad \text{ i } \quad (\forall x)(\exists y)(q(x) \wedge \neg q(y)).$$

Prvu formulu je moguće zadovolјiti. Ako, primjerice, varijable x, y predstavljaju ljude koji su u određenom trenutku živi, onda $r(x)$ možemo interpretirati kao “ x je monogamno oženjen muškarac”, a $s(x, y)$ kao “ y je supruga od x ”. Dakle, prva preneksna formula zapravo kaže “svaki monogamno oženjen muškarac ima suprugu”. To je svakako istinit iskaz. Drugu preneksnu formulu nije moguće zadovolјiti. Ona tvrdi da, bez obzira na to kako interpretiramo simbol q , svi pojedinačni predmeti imaju svojstvo koje smo označili sa q i da neki predmeti to svojstvo nemaju.

Preneksnu formulu možemo razvrstati po načinu na koji su raspoređeni egzistencijalni i univerzalni kvantifikatori. Tako govorimo o, na primjer, *prefiksnoj klasi* $\forall\exists\forall$ koja označuje skup svih preneksnih formula koje počinju s $(\forall\dots)(\exists\dots)(\forall\dots)$, i tako dalje. Kurt Gödel je 1932. u jednom članku objavio algoritam koji za svaku preneksnu formulu koja pripada prefiksnoj klasi

$$\forall\forall\exists\dots\exists$$

može utvrditi da li ju je moguće zadovolјiti. Godinu dana kasnije objavio je rad u kojem je dokazao kako je za rješavanje Entscheidungsproblema dovoljno dati algoritam kojim bi se utvrdilo je li moguće zadovolјiti sve preneksne formule prefiksne klase

Tako je procijep između onoga što je postignuto i onoga što se traži sveden na jedan jedini univerzalni kvantifikator, na jedno $\forall$.

Gödelovi radovi koji se odnose na tu problematiku mogu se naći u [Gödel], sv. I, str. 220–35, 306–27. Tekstovi su na njemačkom jeziku, a ista knjiga sadrži i engleski prijevod. U istom svesku, na stranicama 226–31, nalazi se i vrlo poučan uvod Warrena Goldfarba koji opisuje radove koji su o toj problematici napisani ranije.

¹⁰[Hodges], str. 93.

¹¹Turing je taj problem objasnio temeljitije (vidi [Turing 2], str. 250–51). Vidi i antologiju [Davis 1], str. 136–37.

¹²Iako se nerješivost Entscheidungsproblema na opisani način može dokazati, bilo bi to vrlo nespretno jer se moraju napraviti strukture Turingova stroja za rad sa cijelim brojevima napisane u decimalnom obliku. Želimo li shvatiti što je zapravo učinio Turing, trebamo prvo pokazati da je problem određivanja hoće li Turingov stroj barem jedanput stati ako započne raditi s praznom trakom, nerješiv. Pretpostavimo, dakle, da postoji algoritam za taj problem. Da bismo provjerili pripada li kodni broj n skupu D , prvo ćemo ispisati petorke koje čine Turingov stroj $\mathcal{T}$ s kodnim brojem n . Zatim ćemo ispisati petorke koje uzrokuju da se na traci Turingova stroja otisne broj n . Te ćemo petorke dodati petorkama stroja $\mathcal{T}$ i tako ćemo dobiti novi stroj koji će na traku prvo staviti n , a dalje će raditi ono što bi s tim ulazom radio $\mathcal{T}$. Ako je započeo raditi s praznom trakom, taj novi stroj će stati ako i samo ako $\mathcal{T}$ stane kada započne raditi s n na traci, a to je istinito ako i samo ako n ne pripada skupu D . Naš algoritam, kojim smo namjeravali provjeriti hoće li zadani Turingov stroj koji je započeo raditi s praznom trakom na koncu stati, možemo koristiti kako bismo riješili nerješivi problem određivanja članstva skupa D .

Uočimo, nadalje, da je problem, kako saznati ispisuje li dani Turingov stroj određeni simbol, također nerješiv. Naime, lako je postići

da svaki puta kada stroj stane bude u stanju F u kojem nema novih petorki. Odabrali smo novi simbol X , koji se ne pojavljuje ni u jednoj petorci stroja. Zatim dodajemo petorke

$$F a : X \star F$$

pri čemu a može biti bilo koji simbol koji se javlja u početnim petorkama. Novi stroj će u situacijama u kojima bi obični stroj stao, ispisati X . Dakle, ne postoji algoritam kojim bismo utvrdili bi li Turingov stroj koji započinje rad s praznom trakom ikada ispisao određeni simbol. Upravo je taj problem Turing izrazio u jeziku logike prvoga reda i tako došao do nerješivosti Escheidungsproblema.

¹³[Turing 2], str. 129–32.

¹⁴[Davis 2].

¹⁵Turingova disertacija objavljena je u [Davis 1], str. 155–222. Ta hijerarhija seže sve do Cantorova transfinitnog, pa nakon 1, 2, 3... sustava dolazi sustav broj ω , sustav broj $\omega + 1$ i tako dalje.

¹⁶[Hodges], str. 131.

¹⁷[Hodges], str. 124.

¹⁸[Hodges], str. 145. Oni koji su upoznati s kasnijim radovima Kolmogorova i Chaitina koji se bave problematikom deskriptivne kompleksnosti, vjerojatno će na osnovu ove igre naslutiti da je von Neumann razmišljao na sličan način.

¹⁹[Hodges], str. 545.

²⁰Matematičar Peter Hilton radio je s Turingom u Bletchley Parku i upravo je on ispričao anegdotu o Turingovoj avanturi s Home Frontom. Vidi [Hodges], str. 232.

²¹Taj rad nije bio jedini takve vrste. W.T. Tutte je vjerojatno najviše napravio na tom području. Tehnički detalji problematike kojom se bavio profesor Tutte i Turingovu ulogu vidi na Internetu, na adresi <http://home.cern.ch/frde/crypto/tutte.html>

Osmo poglavlje

¹Ovaj citat vidi u [Goldstine], str. 22. Sjajna biografija Ade Lovelace [Stein] daje nam naslutiti da je većina onoga što je o njoj napisano zapravo mit.

²[Goldstine], str. 120.

³Atanasoffljev stroj rješavao je paralelne sustave linearnih jednadžbi. Evo jednog primjera takvog problema

$$2x + 3y - 4z = 5$$

$$3x - 4y + 2z = 2$$

$$x - 3y - 5z = 4$$

Stroj je mogao riješiti do trideset jednadžbi s trideset nepoznanica.

⁴[Lee], str. 44. Biografski podaci u ovom odjeljku većinom dolaze iz tog izvora.

⁵[Burks-Burks].

⁶Diferencijalni analizatori sadržavali su nekoliko sklopova. Oni su mogli dati odgovarajuće vrijednosti koje su blizu veličina konačnog cijelog broja. ENIAC je sadržavao sklopove koji su pomoću uobičajenih algoritama to izvodili puno preciznije.

⁷[Goldstine], str. 186, 188.

⁸Von Neumannov Nacrt izvještaja o EDVAC-u (*The First Draft of a Report on the EDVAC*) imao je velik utjecaj i pročitao ga je velik broj ljudi. Usprkos tome objavljen je tek 1981. godine i to u dodatku jedne knjige koja je izražavala priličnu skepsu prema značaju von Neumannovih otkrića. Vidi [Stern], str. 177–246.

⁹[McCull-Pitts], [von Neumann 2], str. 319.

¹⁰[Goldstine], str. 191.

¹¹[Randell], str. 384.

¹²[Goldstine], str. 209; [Knuth].

¹³[von Neumann 2], str. 1–32.

¹⁴[von Neumann 2], str. 34–79.

¹⁵U nekim istraživanjima umanjen je značaj von Neumannovih otkrića s područja razvoja računala, a Turingova otkrića su potpuno zanemarena. Vidi [Metrop-Worlt] i [Stern].

¹⁶[Stern] opisuje uspone i padove Eckertova i Mauchlyjeva nastojanja da svoja otkrića pokušaju staviti na tržište.

¹⁷Citirana analiza izvještaja o ACE-u je izvrstan članak [Carp-Doran]. Tekst izvještaja naveden je u [Turing 1], str. 1–105. Godinama je postojao samo u šapirografiranom obliku i nije lako bilo doći do njega.

¹⁸Turing je, suvremenom terminologijom rečeno, preložio upotrebu stoga pri radu s potprogramima. Stog je jednostavno organizacija podataka u kojoj podatak koji zadnji ulazi prvi izlazi (LIFO struktura, eng. *last-in-first-out*). Dakle, kad se računanje prekine da bi se iskoristio prethodno programiran potprogram, napraviti će se podsjetnik što treba napraviti nakon što se program zaustavi. Budući da potprogrami mogu pozvati druge potprograme, dobivamo stog takvih podsjetnika. Turing je predložio slikovite termine "bury"/pokopaj/ za stavljanje bilješki u stog i "unbury"/otkopaj, ekshumiraj/ za ponovno pronalaženje sa vrha stoga. Danas se za naredbu koja piše na stog koristi termin "push"/ubaci/, a za naredbu koja čita sa stoga termin "pop"/izbaci/.

¹⁹[Hodges], str. 352.

²⁰[Turing 1], str. 106–7.

²¹[Turing 1], str. 102–5, [Hodges], str. 361.

²²[Metrop-Worlt], [Stern].

²³[Goldstine], str. 191–92.

²⁴[Turing 1], str. 25.

²⁵[Davis 3].

²⁶[Whitemore].

²⁷[Marcus], str. 183–84. Ovo je citat iz poznate Engelsove knjige *Položaj radničke klase u Engleskoj 1844*.

²⁸[Lavington], str. 31–47.

²⁹[Goldstine], str. 218.

³⁰[Hodges], str. 149.

Deveto poglavlje

¹[Turing 1], str. 122.

²Petorica inženjera računarstva koji su govorili na skupu Američkog udruženja za napredak znanosti izložila su sljedeće radove: Joseph Y. Halpern, *Epistemic Logic in Multi-Agent Systems*; Phokion G. Kola-itis, *Logic in Computer Science – An Overview*; Christos Papadimitriou, *Complexity As Metaphor*; Moshe Y. Vardi, *From Boole to Pentium* te Victor D. Vianu, *Logic As a Query Language*.

³Kratku bilješku uz biografiju Josepha Weizenbauma vidi u [Lee], str. 724.

⁴[Turing 1], str. 133–60. Također i na Internetu, na www.cse.msu.edu/~cse841/papers/Turing.html

⁵U članku [Searle] upućuje se na njegove druge radove sa sličnom tematikom. Ovaj članak je zapravo dio recenzije popularne knjige Raya Kurzweila. Nije mi bila namjera braniti Kurzweila od Searle-ova napada, već mi je ta recenzija poslužila samo kao izvor za neke uobičajene Searleove stavove.

⁶Nakon što su Turing, Church i drugi objasnili algoritme, Gödelov teorem nije mogao biti nikako drugačije formuliran.

⁷Penrose je napisao jednu popularnu i zabavnu knjigu [Penrose 1], u kojoj prvi put dokazuje da je u pravu. Iako ga je nekoliko logičara pokušalo ispraviti, on ustrajava na svojim pogrešnim stajalištima. Ja sam upravo o tome napisao esej [Davis 4]. Penrose u [Penrose 2] daje odgovor na kritike, a [Davis 5] sadrži moje mišljenje o njegovom odgovoru.*

⁸Između ostalog o tome vidi u [Gödel], sv. II, str. 297.

*autorove kritike dostupne su i na Internetu, <http://cs.nyu.edu/cs/faculty/davism-op.ur>.

Bibliografija

- [Aiton] Aiton, E. J., *Leibniz: A Biography*. Bristol, UK, i Boston, MA: Adam Hilger Ltd, 1985.
- [Baker-Hacker] Baker, G. P, i P. M. S. Hacker. *Frege: Logical Excavations*. New York: Oxford University Press i Oxford: Basil Blackwell, 1984.
- [Barret-Ducrocq] Barret-Ducrocq, F. *Love in the Time of Victoria*. New York: Penguin Books, 1992.
- [Ben-Put] Benacerraf, P, i H. Putnam. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 2. izd. London i New York: Cambridge University Press, 1983.
- [Boole 1] Boole, G. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge, UK: Macmillan, Barclay, and Macmillan, 1847.
- [Boole 2] ———. *An Investigation of the Laws of Thought on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. London: Walton and Maberly, 1854; pretisak, New York: Dover, 1958.

- [Boole 3] ———. *A Treatise on Differential Equations*, 5. izd. Cambridge, UK: Macmillan, 1865.
- [Boolos] Boolos, G. "Frege's Theorem and the Peano Postulates", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1 (1995), str. 317–26.
- [Bourbaki] Bourbaki, N. *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, 2. izd. Paris: Hermann, 1969.
- [Britannica] *The Encyclopædia Britannica*, 11. izd. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1910, 1911.
- [Brouwer 1] Brouwer, L. E. J., *Collected Works*, vol. I. Amsterdam: North-Holland, 1975.
- [Brouwer 2] ———, "Life, Art, and Mysticism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 37 (1996), str. 389–429. Eng. prijevod W.P. van Stigt. Vidi također prevoditeljjev uvod, str. 381–87.
- [Browder] Browder, F. ur. "Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems", *Proceedings of Symposia on Pure Mathematics*, sv. XXVII. Providence: American Mathematical Society, 1976.
- [Burks-Burks] Burks, A. W. i A. R. Burks. "The ENIAC: First General-Purpose Electronic Computer", *Annals of the History of Computing*, vol. 3 (1981), str. 310–99.
- [Bynum] Bynum, T.W., ur. i prev. *Conceptual Notation and Related Articles* by G. Frege. London and New York: Oxford University Press, 1972.
- [Cantor 1] Cantor, G. *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Julius Springer, 1932.

- [Cantor 2] ———. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. La Salle, IL: Open Court, 1941. Prijevod s njemačkog, uvod i bilješke P. E. B. Jourdain.
- [Carp-Doran] Carpenter, B. E., i R. W. Doran. "The Other Turing Machine", *Computer Journal*, vol. 20 (1977), str. 269–79.
- [Ceruzzi] Ceruzzi, P. E. *Reckoners, the Prehistory of the Digital Computer, from Relays to the Stored Program Concept, 1933–1945*. Westport, CT: Greenwood Press, 1983.
- [Constable] Constable, R. L. et al. *Implementing Mathematics with the Nuprl Proof Development System*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1986.
- [Couturat] Couturat, L. *La logique de Leibniz d'Après des Documents Inédits*. Paris: F. Alcan, 1901. Pretisak Hil-desheim: Georg Olms, 1961.
- [Craig] Craig, G. A. *Germany 1866–1945*. London and New York: Oxford University Press, 1978.
- [Daly] Daly, D. C. "The Leaf that Launched a Thousand Ships", *Natural History*, sv. 105, br. 1 (siječanj 1996), str. 24–32.
- [Dauben 1] Dauben, J. W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1979.
- [Dauben 2] ———. *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.

- [Davis 1] Davis, M, ur. *The Undecidable*. Hewlett, NY: Raven Press, 1965.
- [Davis 2] ———. "Why Gödel Didn't Have Church's Thesis", *Information and Control*, sv. 54 (1982), str. 3–24.
- [Davis 3] ———. "Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers", *Studies in the History of Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1987, str. 137–65. Pretisak u R. Herker, ur. *The Universal Turing Machine – A Half-Century Survey*. Hamburg and Berlin: Verlag Kemmerer & Unverzagt, 1988; i London i New York: Oxford University Press, 1988.
- [Davis 4] ———. "Is Mathematical Insight Algorithmic?" *Behavioral and Brain Sciences*, sv. 13 (1990), str. 659–60.
- [Davis 5] ———. "How Subtle is Gödel's Theorem? More on Roger Penrose", *Behavioral and Brain Sciences*, sv. 16 (1993), str. 611–12.
- [Dav-Hersh 1] Davis, M. i R. Hersh. "Nonstandard Analysis", *Scientific American*, sv. 226 (1972), str. 78–86.
- [Dav-Hersh 2] ———. "Hilbert's 10th Problem", *Scientific American*, sv. 229 (1973), str. 84–91.
- [Dav-Sig-Wey] Davis, M, R. Sigal i E. Weyuker. *Computability, Complexity, and Languages*, 2. izd. New York: Academic Press, 1994.
- [Dawson] Dawson, J. W, ml. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. Wellesley, MA: A K Peters, 1997.

- [Dummett] Dummett, M, *Frege: Philosophy of Language*, 2. izd. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981.
- [Edwards] Edwards, C. H, ml. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [Euklid] Heath, sir T. L, prev. *Euclid's Elements* (s uvodom i komentarima), sv. I. New York: Dover Publications, 1956. Usp. prijevod M. Hudoletnjak Grgić, *Elementi*. Zagreb: Kruzak, 1999.
- [Feferman] Feferman, S, "Does Mathematics Need New Axioms?" *American Mathematical Monthly*, sv. 106 (1999), str. 99–111.
- [Frege 1] Frege, G, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg: Felix Meiner, 1976. Usp. također Švob, G. *Frege: Pojmovno pismo*. Zagreb: Filozofski fakultet, 1992.
- [Frege 2] ———. "Diary for 1924", *Inquiry*, sv. 39 (1996), str. 303–42. Prev. R. L. Mendelsohn.
- [Frege 3] ———. "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, nova serija, sv. 100 (1892), str. 25–50. Engleski prijevod u Geach, P, i M. Black, ur. *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Blackwell, 1952. Usp. prijevod Filipa Grgića u Frege, G, *Osnove aritmetike i drugi spisi*. Zagreb: Kruzak, 1995.
- [Frege 4] ———. "Rezension von: Georg Cantor. Zum Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, nova serija, sv. 100 (1892), str. 269–72.

- [Geiss] Geiss, I, ur. *July 1914: The Outbreak of the First World War, Selected Documents*. New York: Charles Scribner, 1967.
- [Gerhardt] Gerhardt, C. I, ur. *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, 7 svezaka. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1978. (Fotografski pretpisak izvornog izdanja od 1875–90.)
- [Gödel] Gödel, K, *Collected Works*. London and New York: Oxford University Press, sv. I, 1986; sv. II, 1990; sv. III, 1995. Usp. prijevod Vladimira Kirina "O formalno neodlučivim stavcima *Principia Mathematica* i srodnih sustava I", u Nagel, E, i J. R. Newman. *Gödelov dokaz*. Zagreb: Kruzak, 2001.
- [Gödel-Symp] Weingartner, P, i L. Schmetterer, ur. *Gödel Remembered*. Napoli: Bibliopolis, 1983.
- [Goldstine] Goldstine, H. H. *The Computer from Pascal to von Neumann*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1972.
- [Grattan-Guinness] Grattan-Guinness, I. "Towards a Biography of Georg Cantor", *Annals of Science*, sv. 27 (1971), str. 345–91.
- [Hilb-Acker] Hilbert, D. i W. Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*. Berlin: Julius Springer, 1928.
- [Hilbert] Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen, Band III*. Berlin i Heidelberg: Springer-Verlag, 1935, 1970.
- [Hinsley] Hinsley, F. H. i A. Stripp, ur. *Codebreakers: The Inside Story of Bletchley Park*. Oxford i New York: Oxford University Press, 1993.

- [Hodges] Hodges, A. *Alan Turing: The Enigma*. New York: Simon and Schuster, 1983.
- [Hofmann] Hofmann, J. E. *Leibniz in Paris 1672–1676*. London: Cambridge University Press, 1974.
- [Huber] Huber, K. *Leibniz*. München: Verlag von R. Oldenbourg, 1951.
- [Huskey] Huskey, V.R. i H.D. Huskey, "Lady Lovelace and Charles Babbage", *Annals of the History of Computing*, sv. 2 (1980), str. 299–329.
- [Kagan] Kagan, D. *On the Origin of War and the Preservation of Peace*. New York: Doubleday, 1995.
- [Kinealy] Kinealy, C. "How Politics Fed theFamine", *Natural History*, sv. 105, br. 1 (siječanj 1996), str. 330–35.
- [Kluge] Kluge, E. H. W. "Frege, Leibniz, et alia", *Studia Latiniana*, sv. IX (1977), str. 266–74.
- [Knuth] Knuth, D.E. "Von Neumann's First Computer Program", *Computer Surveys*, sv. 2 (1970), str. 247–60.
- [Kreisel] Kreisel, G. "Kurt Gödel: 1906–1978", *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, sv. 26 (1980), str. 149–224; corrigenda, sv. 27 (1981), str. 697.
- [Lavington] Lavington, S. *Early British Computers*. Bedford, MA: Digital Press, 1980.
- [Lee] Lee, J. A. N. *Computer Pioneers*. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1995.

- [Leibniz 1] Leibniz, G. W. "Dissertatio de Arte Combinatoria", G. W. Leibniz: *Matematische Schriften, Band V*. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1962, str. 8–79. (Fotografski pretisak izvornog izdanja iz 1858.)
- [Leibniz 2] ———. "Letter from Leibniz to Galloys, December 1678", G. W. Leibniz: *Matematische Schriften, Band I*. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1962, str. 182–88. (Fotografski pretisak izvornog izdanja iz 1849.)
- [Leibniz 3] ———. "Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio set et multiplicato nullo, divisio vero pæne nullo animi labore peragantur", 1685. Engleski prijevod M. Kormesa u Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929, str. 173–81.
- [Lewis] Lewis, C. I. *A Survey of Symbolic Logic*. New York: Dover, 1960. (Korigirana verzija I–IV poglavlja izvornog izdanja, Berkeley: University of California Press, 1918.)
- [MacHale] MacHale, D. *George Boole: His Life and Work*. Dublin: Boole Press, 1985.
- [Mancosu] Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert*. London and New York: Oxford University Press, 1998.
- [Mates] Mates, B. *The Philosophy of Leibniz: Metaphysics & Language*. London i New York: Oxford University Press, 1986.
- [McCull-Pitts] McCulloch, W. S, i W. Pitts. "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity",

- Bulletin of Mathematical Biophysics*, sv. 5 (1943), 115–33. Pretisak u McCulloch, W. S. *Embodiments of Mind*. Cambridge, MA: MIT Press, 1965, str. 19–39.
- [Marcus] Marcus, S. *Engels, Manchester, and the Working Class*. New York: W. W. Norton, 1974.
- [Meschkowski] Meschkowski, H. *Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1983.
- [Metrop-Worlt] Metropolis, N, i J. Worlton, "A Trilogy of Errors in the History of Computing", *Annals of the History of Computing*, sv. 2 (1980), str. 49–59.
- [Parkinson] Parkinson, G. H. R. *Leibniz – Logical Papers*. London i New York: Oxford University Press, 1966.
- [Penrose 1] Penrose, R. *The Emperor's New Mind*. London i New York: Oxford University Press, 1989.
- [Penrose 2] ———. "The Nonalgorithmic Mind", *Behavioral and Brain Sciences*, sv. 13 (1990), str. 692–705.
- [Poincaré] Poincaré, H. *Science and Method*. New York: Dover, 1952.
- [Purkert-Ilgauds] Purkert, W. i H. J. Ilgauds. *Georg Cantor: 1845–1918, Vita mathematica*, sv. 1. Stuttgart: Birkhauser, 1987.
- [Randell] Randell, B. ur. *The Origins of Digital Computers, Selected Papers* 3. izd. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [Reid] Reid, C. *Hilbert–Courant*. New York: Springer-Verlag, 1986. Izvorno objavio Springer-Verlag

- kao dva odvojena djela: Hilbert, 1970. i *Courant in Göttingen and New York: The Story of an Improbable Mathematician*, 1976.
- [Rucker] Rucker, R. *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Boston: Birkhuser, 1982.
- [Searle] Searle, J. R. "I Married a Computer", *The New York Review of Books*. 8. travnja 1999, str. 34–38.
- [Sieg] Sieg, W. "Hilbert's Programs: 1917–1922", *Bulletin of the Association for Symbolic Logic*, sv. 5 (1999), str. 1–44.
- [Siek-Wright] Siekmann, J. i G. Wrightson, ur. *Automation of Reasoning*, sv. 1. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [Sluga] Sluga, H. *Heidgger's Crisis: Philosophy and Politics in Nazi Germany*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981.
- [Stein] Stein, D. *Ada: A Life and a Legacy*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
- [Stern] Stern, N. *From Eniac to Univac: An Appraisal of the Eckert-Mauchly Machines*. Bedford, MA: Digital Press, 1981.
- [Swoyer] Swoyer, C. "Leibniz's Calculus of Real Addition", *Studia Leibnitiana*, sv. XXVI (1994), str. 1–30.
- [Tuchman] Tuchmann, B. W. *The Guns of August*. New York: Macmillan, 1962, 1988.
- [Turing 1] Turing, A. *Collected Works: A Mechanical Intelligence*. Amsterdam: North-Holland, 1992.

- [Turing 2] ———. "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, serija 2, sv. 42 (1936), str. 230–67. Ispravke: sv. 43 (1937), str. 544–46. Pretisak u [Davis 1], str. 116–54.
- [van Heijenoort] van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.
- [van Stigt] van Stigt, W. P. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam North-Holland, 1990.
- [von Neumann 1] von Neumann, J. *First Draft of a Report on the EDVAC*, Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, 1945. Prvi put otisnuto u [Stern], str. 177–246.
- [von Neumann 2] ———. *Collected Works*, sv. 5. New York: Pergamon Press, 1963.
- [Welchman] Welchman, G. *The Hut Six Story*, New York: McGraw-Hill, 1982.
- [Weyl] Weyl, H. "David Hilbert and His Mathematical Work", *Bulletin of the American Society*, sv. 50 (1944), str. 612–54.
- [White-Russ] Whitehead, A. N. i B. Russell. *Principia Mathematica*, sv. I, 2. izd. London i New York: Cambridge University Press, 1925.
- [Whitemore] Whitemore, H. *Breaking the Code*. London: Samuel French Ltd, 1988.
- [Zach] Zach, R. "Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic", *Bulletin of Symbolic Logic*, sv. 5 (1999), str. 331–36.

Kazalo

- $\aleph_0$, 90–93, 96
 π , 22–23, 81–82, 86, 189 *fn*
- ACE (Automatic Computing Engine),
215–218, 220, 222–224, 236
Ackermann, Wilhelm, 119, 122–123,
133, 138
Ada, programski jezik, 204
Aiken, Howard, 13, 164, 205
aksiomsvodivosti, 114
“Aksiomatsko mišljenje” (Hilbert),
119
algebarska teorija broja, 109
algebarske konstante, 105–107, 108,
250–251
algebra, 22, 40, 109
Booleova, 47–54
i teorija konstanti, 242, 250–251
Leibnizova univerzalna
karakteristika i $\sim$, 28–32
algoritam, 170, 172, 176, 186–188, 204
i ljudski um, 234–236
American Journal of Mathematics, 191
Američko matematičko društvo, 112,
159 *fn*
Američko udruženje za napredak
znanosti, 228
analitički stroj, 163
von Ansbach, Karolina, kraljica
Engleske, 35
arapskibrojevi, 29
Aristotel, 17, 32, 41, 48, 51, 55, 77, 116,
146, 228
 $\sim$ ov princip proturječja, 48
aritmetika, 20, 28, 29, 71, 110, 111,
122–123, 138, 209
u Kantovoj filozofiji, 99–101
uloga beskonačnog u $\sim$, 101
Association for Symbolic Logic, 55 *fn*
a-stroj, 176 *fn*
Atanasoff, John, 205, 206
atomska bomba, 120 *fn*, 195 *fn*
Austrija, 149, 151
Dollfussov režim, 149

Austro-Ugarsko Carstvo, 61, 131, 132
 Automatic Sequence Controlled
 Calculator, 205
 Aydelotte, Frank, 153

Babbage, Charles, 163–164, 204
 Bacon, Francis, 99
 Bauch, Bruno, 64
 Bečki krug, 132, 133, 140–141, 145,
 149, 152
Begriffsschrift (Frege), 64, 69–70, 72,
 74, 114, 122, 133, 144
Being and Attributes of God (Clarke), 36
 Belgija, 61, 118
 Bergmann, Gustav, 152
 Berkeley, George, 240
 Bernays, Paul, 119, 122, 125, 136
 Berry, Clifford, 205
 beskonačni nizovi, 22, 81–82
 beskonačni skupovi, 82–88, 90, 154
 ~ brojeva, 83–86
 veličina ~, 86–87
 beskonačnost, 155
 Cantorova potraga za ~, 88–93
 dovršena, 77, 82
 Leibniz o ~, 77–78
 potencijalna, 77–78, 81
 stvarna, 77
 u Cantorovoj filozofiji, 99
 uloga ~ u matematici, 100–101,
 156
 Bieberbach, Ludwig, 123
 binarna notacija, 29, 189*fn*, 209,
 247–249
 Bismarck, Ottovon, 61, 64, 104
 Blanchette, Patricia, 71*fn*
 Bletchley Park, 196–199
 univerzalni stroj i ~, 199–200
 Blumenthal, Otto, 109, 126

Boineburg, Johann von, 19
Bombe, 197–198
 Boole, Alicia, 46
 Boole, Ethel Lilian, 46
 Boole, George, 32, 33, 35–55, 65, 68,
 69, 70, 105, 158, 204, 237
 algebra logike, 47
 brak, 45
 djeca, 46
 i princip proturječja, 48
 i silogizmi, 49–53
 i teorija konstanti, 242, 250
 karijera vlasnika škole, 39
 Leibnizov sustav u usporedbi
 sa sustavom ~, 54
 logički sustav, 42, 47, 54
 na Queen's Collegeu, 43
 o pitanjima seksualnosti, 39
 proučavanje matematike, 40–41
 rođenje, 36
 smrt, 45
 stav prema Irskoj, 43
 školovalanje, 37
 zanimanje za diferencijalne
 operatore, 40
 Boole, John, 36
 Boole, Mary, 36
 Boole, Mary Ann, 39
 Boole, Mary Everest, 44–46
 Boole, William, 39
Breaking the Code (Whitemore), 221,
 225
 brojevi, 32, 138–139
 algebarski, 86–87
 beskonačni, 88–93
 beskonačni skupovi ~, 83–86
 infinitesimalni, 240
 iracionalni, 85, 118, 249
 kardinalni, 88, 92–93, 96, 155,
 247–249

- klase, 92–93
 prtrodni, 71–72, 77, 82, 88, 91,
 93, 95–96, 248, 254
 racionalni, 85
 realni, u realni brojevi
 redni, 88, 91–92
 teorija ~, 71, 84, 251
 transcendentni, 86–87, 247
 transfinitni, 90, 91–92, 96,
 112–113, 121
 Brouwer, L. E. J., 115–118, 125, 134,
 138, 139, 145, 263
 Hilbertov sukob s ~, 117–118
 teorem čvrste točke, 116–117
 Burali-Forti, Cesare, 97
 Byron, George Gordon, Lord, 204
- calculus ratiocinator, 30–31, 33, 54
Cambridge Mathematical Journal, 41
Candide (Voltaire), 16*fn*
 Cantor, Georg, 77–101, 115, 116, 117,
 118, 121, 131, 132, 237, 252
 ~ova teorija skupova, 82–87
 beskonačni brojevi, potraga za,
 88–92
 beskonačnost u filozofiji ~, 99
 dijagonalna metoda, 93–96, 97,
 98, 182–186
 hipoteza o kontinuumu, 90–92,
 98, 111, 152, 154–157,
 195*fn*, 263
 Kroneckerov sukob s ~, 87, 98,
 104–105
 proučavanje trigonometrijskih
 nizova, 82, 88, 91
 rođenje, 79
 shvaćanje empirizma, 100
 smrt, 101
 supruga i djeca, 87
 zanimanje za pitanje autorstva
 Shakespeareovih drama,
 98–99
 živčani slom, 98
 Cantor, Georg Waldemar, 79–81
 Cantor, Marie Böhm, 79
 Cantor, Vally Guttman, 87
 Carnap, Rudolf, 125, 132, 145, 158
 Cervantes, Miguel de, 15
 Church, Alonzo, 71, 191–192
 Churchill, Winston, 198, 218
 Clarke, Joan, 199
 Clarke, Samuel, 36, 53–54
 Cohen, Paul, 90, 155
 Colossus, elektronički kalkulator, 201,
 208, 213, 218
Computable Numbers (Turing), 215–216
Computing Machinery and Intelligence
 (Turing), 230
 Comte, August, 100
 Courant, Richard, 103–104, 124, 126
Course of Pure Mathematics (Hardy),
 168
 Couturat, Louis, 28
- Čehoslovačka, 131
- Darboux, Gaston, 119
 De Morgan, Augustus, 41
 Dedekind, Richard, 86, 87, 104, 105,
 113, 117, 118, 251, 252
 Deep Blue, 231, 233–234
 Deep Thought, 232
 denotacijska semantika, 245
 Descartes, René, 22
 diferencijalni analizator, 208, 219
 diferencijalni operatori, 40
 diferencijalni račun, 16, 24–25, 28, 40,
 71

Leibnizov niz i izum $\sim$, 22–25,
104
limes i $\sim$, 22–24, 78, 81–82, 104,
105, 117, 168–169
dijagonalna metoda, 95–96, 97, 98
 Turingova primjena, 182–186
Dirichlet, Lejeune, 103
Dissertatio de Arte Combinatoria, 19
Dollfuss, Engelbert, 149–150
DPG (Desničarsko filozofsko
 društvo), 64
Društvo Kurta Gödela, 131
Društvo za znanosti, 27
drugaklasa brojeva, 92–93
Drugi svjetski rat, 10, 120*ft*, 152, 205
 dešifriranje Enigme, 196–198
Dummett, Michael, 58, 59

Eckert, John Presper, 14, 205, 206, 208,
 209, 210–211, 213–214
Eddington, Arthur, 168
EDSAC, 222
EDVAC, 13–14, 208–211, 213, 214,
 215–216, 218–220,
 222–223, 234, 268
egzistencijalni kvantifikator, 66
Einstein, Albert, 121, 126, 129, 150,
 156, 158, 161, 167, 168, 193
ENIAC, 13, 14, 205–206, 207–208, 209,
 213, 214, 215, 268
 univerzalno računalo I $\sim$, 219
Enigma, 196–198
Entscheidungsproblem, 123, 170–172,
 176, 182, 186–189, 191,
 192, 194, 264–265, 266–267
Euklid, 17, 83, 110
Everest, George, 45
Everest, Mary, v. Boole, Mary Everest

Feferman, Solomon, 254
Ferdinand, nadvojvoda, 61
Fermat, Pierre de, 22
Fillingham, pukovnik, 198
filozofija, 58, 132
 $\sim$ jezika, 73–74
 empiriistička, 100
 Kantova, 99
First Draft of a Report on the EDVAC
 (von Neumann), 209, 268
Flowers, T., 201, 218
Fourier, Jean, 246
Francuska, 19, 59–61, 63, 104, 118,
 119, 153, 196, 203
Frege, Alfred, 59
Frege, Gottlob, 32, 54, 57–75, 116, 118,
 120, 122, 131, 132, 133,
 136, 144, 145, 156, 158,
 170, 172, 188, 237
 antisemitizam $\sim$, 58, 62–64
 brak, 59
 dnevnik, 58, 59, 62–63
 i filozofija jezika, 73–74
 i Leibnizov san, 74–75
 i moderna logika, 64–69
 izum formalne sintakse, 69–71
 kao desničarski ekstremist,
 62–64
 logički sustav $\sim$, 64–69
 o ulozi beskonačnog, 101
 rođenje, 59
 Russelovo pismo $\sim$, 57–58,
 71–73, 78–79, 97–98, 101,
 112
 smrt, 59, 64
Frege, Margarete Lieseberg, 59

Gadfly, The (Ethel Lilian Boole), 46
Galloys, Jean, 29

- Gauss, Carl Friedrich, 78, 82, 88, 103, 113, 251
- geometrija, 17, 22, 71 *fn*
- Hilbertov aksiomatski sustav
- i ~, 109–110
- i topologija, 117, 171
- u kantovskoj filozofiji, 99–101
- George I, kralj Engleske, 26–28, 35, 103
- George II, kralj Engleske, 35, 103
- glavni brojevi, v. kardinalni brojevi
- Goldstine, Herman, 206, 207–209, 214, 219, 223
- gotovo-periodičke funkcije, 170
- Gödel, Adele, 148, 151, 152, 153, 161
- Gödel, Kurt, 90, 125, 129–161, 191–194, 196, 206–207, 221 *fn*, 237, 255
- brak, 148–149
- disertacija, 133–134, 136–137, 170
- duševna bolest, 150, 158, 160–161
- emigracija u SAD, 153
- i hipoteza o kontinuumu, 154–157
- i kodiranje simbola, 139–141
- i nacistički režim, 152–153
- i problem uma i tijela, 235–236
- na Institutu za napredna istraživanja, 150–152
- neodlučivi iskazi, 140–145
- pogled na teoriju relativnosti, 129–131
- rođenje, 131
- starost i smrt, 160–161
- stvaranje umjetnog jezika, 143–144
- školovanje, 131–132
- teorem o nepotpunosti, 136–137, 145–148, 159, 172, 182, 217, 235–236, 264
- upotreba kineskog teorema ostatka, 261–262
- Gödel, Rudolf, 131, 132, 148
- Göttingenski matematički institut, 124
- Graves, Charles, 243
- Hahn, Hans, 132, 133, 149, 150, 152
- Hamilton, William, 41, 54
- Hannover, Ernst August, vojvoda ~, 26
- Hannover, Johann Friedrich, vojvoda ~, 25–26
- Hannover, Sophie, vojvotkinja ~, 27
- hardver, 146, 190, 191, 216, 233
- Hardy, G. H., 168, 171, 186, 188
- Hegel, Georg Wilhelm Friedrich, 100
- Heine, Eduard, 81
- Helmholtz, Herman von, 100, 132
- Heyting, Adam, 125, 145, 262
- Hilbert, David, 103–127, 133–134, 145, 147, 156, 159, 164, 194, 207, 237, 249, 251, 260
- ~ temeljni teorem, 107
- aksiomatski sustav geometrije, 109–110
- brak, 108
- Entscheidungsproblem*, 123, 170–172, 176, 186–188, 191, 192, 264–267
- govor "moramo znati", 125, 155
- i Gordanova postavka, 107–108
- i hipoteza o kontinuumu, 110–112
- incident s poderanim hlačama, 103–104
- metamatematika, 119–123, 136, 137, 138–139, 144, 154, 254

- način izlaganja, 109
 opis ~, 109
 privatni život, 124
 rad na algebarskim
 konstantama, 105–108
 rođenje, 104
 smrt, 127
 Weylov i Brouwerov sukob s ~,
 118, 120–122
- Hilbert, Franz, 124
 Hilbert, Käthe Jerosch, 108, 124
 Hilbertov temeljni teorem, 107
 Hindenburg, Paul von, 62
 hipoteza o kontinuumu, 90–92, 98,
 151, 195*fn*, 263
 Gödel i ~, 154–157
 Hilbert i ~, 111–112
 Hitler, Adolf, 59, 62, 126, 149, 151
 hladni rat, 120*fn*
 Hodges, Andrew, 194
 Honeywell protiv Sperry Randa,
 sudski proces, 203
 Huber, Kurt, 33*fn*
 Hurwitz, Adolf, 104, 251
 Huygens, Christiaan, 21
- IBM, 205
 računalo 701, 215
 računalo Deep Blue, 231, 232
 impredikativni skupovi, v. neobični
 skupovi
 Institut za napredna istraživanja,
 120*fn*, 126, 129, 156, 160,
 191, 193, 214, 215*fn*
 Gödel na ~, 150–152
 integralni račun, 16, 24–25, 71, *vidi i*
 diferencijalni račun
 intuicionizam, 117, 121
 iracionalni brojevi, 85, 118, 249–250
- Irska, 43–44
- Jacquard, Joseph-Marie, 203–204
 jedinstvena teorija polja, 126*fn*
 jezik, 58, 114, 133
 ~ logike, 74, 134
 filozofija ~, 73–74
 Fregeova formalna sintaksa,
 69–71
 i pravila izvođenja, 69–70
 programski, 69, 143, 190,
 260–261
 simbolički, 120
 strojni, 143, 143*fn*, 190, 224
 supstitutivnost, 73–74
 umjetni, 16, 69, 144
 "johnniac", 215, 216
Journal of Symbolic Logic, 192*fn*
- Kane, Robert, 44
 Kant, Immanuel, 99–101, 104, 121,
 129–131, 158
 kardinalni brojevi, 88, 92–93, 96, 155,
 247–249
 kartezijanski dualizam, 236
 Kasparov, Gari, 231, 232–233
 kineski teorem ostatka, 144–145,
 261–262
- klase:
 u algebri logike, 47–48
 u logičkom zaključivanju, 42
- Kleene, Stephen, 191
 Klein, Felix, 103, 108
 Kodaira, Kunihiro, 126*fn*
 kompilator, 143
 konačni skupovi, 91
Kontinuum, Das (Weyl), 117
 Kronecker, Leopold, 81, 107, 108, 111,
 115, 116, 118, 251

- sukob s Cantorom, 87, 93, 98,
104–105
- Kummer, Ernst, 81
- Kurzweil, Ray, 270
- kvantnateorija, 168
- L'Hospital, G. F. A., 28
- lambda-definibilnost, 191, 192
- Larson, Earl R., 206
- Laws of Thought, The* (Boole), 42
- Leibniz, G. W., 15–33, 40, 42*fn*, 71,
74–75, 82, 114, 123, 129,
144, 156, 170, 190, 228, 237
- ~ izum simboličke notacije,
28–29, 31–32
- ~ pogled na svijet, 15–16
- ~ sustav u usporedbi s
Booleovim, 54–55
- ~ učenice, 27
- abeceda pojmova, 17, 19
- boravak u Londonu, 20
- i limesi, 22–24
- i princeza Karolina, 35–36
- i projekt planine Harz, 15–16, 26
- i pronalazak diferencijalnog
računa, 24–25, 104
- kao osoba, 32–33
- o beskonačnosti, 77–78
- osnivač Društva za znanosti, 27
- pojam univerzalne
karakteristike, 28–30, 68,
157–158
- prepirka s Newtonom, 35–36
- rođenje i mladost, 17–19
- u Parizu, 19–25
- upotreba infinitezimalnih
brojeva, 240
- “Leibnizov kotač”, 20
- Library of Living Philosophers*, 156, 158
- Life, Art and Mysticism* (Brouwer), 115
- limes, 22–24, 78, 82, 94, 104, 105, 117
- Liouville, Joseph, 247
- logički pozitivizam, 132*fn*
- logizam, 71, 73
- logika:
- ~ prvoga reda, 122–123, 170,
188, 244–245
- Aristotelova, 17
- Booleov sustav, 41–42
- Booleova algebra ~, 47–54
- dedukcija u ~, 133–136
- Fregeov sustav, 64–69
- i beskonačnost, 116
- i klase predmeta, 41–42
- i kodiranje simbola, 139–140
- i matematika, 69–71, 116,
119–121, 125
- i računala, 211, 227–228
- i zakon isključenja trećeg, 116,
118
- Leibnizova algebra ~, 29–32
- premissa i konkluzija u ~, 51,
133–134
- premissa i konkluzija u ~, 48
- princip proturječja, 48–49
- silogizam, 48–50
- simboli i jezik ~, 134–136
- simbolička, 29–32
- Londonsko matematičko društvo,
217, 227
- Louis XIV, kralj Francuske, 15, 19
- Lovelace, Ada, 204
- Ludendorff, Erich, 62, 63
- Mach, Ernst, 129, 132
- Malebranche, Nicolas, 82
- Mark I, računalo, 222
- Marx, Karl, 100

- p
matematika, 17, 110, 132
Brouwerovo viđenje ~, 115–116
i Kantova filozofija, 99–101
i logika, 69–71, 116, 119–121, 125
istina u ~, 140–143
proturjeđe i dokaz u ~, 72–73
sukob oko prirode ~, 97–98
značenje egzistencije u ~,
111–112, 116, 156
Mates, Benson, 27, 33fn
Matijašević, Jurij, 262
Mauchly, John, 205, 206, 210–211, 214
Meleager, 36
Menger, Karl, 149, 152
Metafizika (Aristotel), 48
metamatematika, 119–123, 136–137,
143–144, 154–155, 254
i kodiranje simbola, 139–140
mikroprocesor, 216
mikroprogramiranje, 216, 222
Minkowski, Hermann, 104, 108
modus ponens, 70, 244
Moore, elektrotehnički fakultet, 13,
205, 206–215, 219
Morcom, Christopher, 167–168
Morgenstern, Oskar, 153
Murray, Arnold, 224
Mussolini, Benito, 149
Nacionalni laboratorij za fiziku
(NPL), 215, 218, 222
Napoleon I, car Francuske, 20
Napoleon III, car Francuske, 59, 104
Nash, John, 117fn
neobični skupovi, 72–73
Newman, M. H. A. (Max), 171–172,
182, 191, 200, 201
o Turingovom univerzalnom
stroju, 195
Newton, Isaac, 21, 25, 104
prepirka s Leibnizom, 35–36
Nobelova nagrada, 117fn
Noether, Emmy, 119
Njemačka, 17, 35, 59–62, 119
empiristička filozofija, 100–101
nacistička, 59, 90fn, 103, 132,
196, 200
pripojenje Austrije ~, 149, 151
slom znanosti u ~, 125–127
Njemačka, weimarska, 59, 62
dolazak Hitlera, 149, 150–151
Njemačko matematičko društvo, 109
O formalno neodlučivim stavcima
Principia Mathematica i
srodnih sustava (Gödel),
141
O smislu i značenju (Frege), 73
opća rekurzivnost, 191
Oppenheimer, J. Robert, 126fn
ORDVAC, 215fn
Pascal, Blaise, 20
Peano, Giuseppe, 113, 123, 244
Peanova aritmetika (PA), 123,
138–139, 140, 223fn
i neodlučivi iskazi, 255–260
Penrose, Roger, 235–236
Pilot ACE, 218, 223
Platon, platonizam, 157, 253
podaci, 190, 212, 235
Poincaré, Henri, 93
kritika Russella, 113–114, 120
Poljska, 46, 152, 153, 196
Post, E. L., 192fn
Pravda, 46

- pravila izvođenja, 69
 Princeton, sveučilište, 192–196
 princip proturječja, 48–49
Principia Mathematica (Russell i Whitehead), 114–115, 133, 140, 145, 252
 prirodni brojevi, 71–72, 77, 82–86, 88, 91, 93, 247–249, 255
 programiranje, programi, 189–191
 prva klasa brojeva, 92–93
 Prvi svjetski rat, 61–62, 64, 101, 131, 132, 149
 manifest “civiliziranom svijetu”, 118
 Putnam, Hilary, 262
- računala, računarstvo:
 Babbageova koncepcija ~, 163–164
 Begriffsschrift kao jezik-preteča, 69
 Colossus, elektronički kalkulator i ~, 201, 235
 i filozofija jezika, 73–74
 i sposobnost za greške, 217
 izumitelji ~, 203–206
 logika i ~, 211, 227–228
 ljudski mozak, analogija s inteligencijom i ~, 199, 210, 217, 224, 227–236
 mikroprocesor, 216
 podaci kao kategorija u ~, 190
 pojam pohranjenog programa, 213–214, 218
 potprogram u ~, 222, 269
 računalni programi, 189–190
 RISC arhitektura, 217, 223
 simboli i procesi u ~, 172–176, 217
 stanja stroja, 176, 178
 svijest i ~, 233
 šah i ~, 199, 204, 216, 217, 231–234
 Turingov izvještaj o ACE-u i ~, 215
 Turingova analiza i model ~, 172–176
 vakumske cijevi i ~, 200–201, 205, 210, 213
 veza između mišljenja i računanja, 227–228
 Von Neumannova arhitektura, 209
- računalna memorija, 209
 katodnacijski kao ~, 213, 214–215, 218, 223
 radna ~ (RAM), 212–213
 Williamsovo korištenje katodnih cijevi za ~, 215
 živina linija kašnjenja kao ~, 213, 214, 220
- racionalni brojevi, 85
 Ramanujan, Srinivasa, 168
 “ramificirana teorija tipova”, 252
 razlomci, 84–85
 kaosimboli, 246–247
 uređeni u slijed, 84
- RCA, 214
 realni brojevi, 93, 96, 111, 117, 122, 248
 definicija, 155–157
 dokaz konzistentnosti, 137–139
 veličina skupa ~, 86–87, 154
- redni brojevi, 88, 91–92
 relativnost, opća teorija, 158, 168
 relativnost, specijalna teorija, 129–131
 Riemann, Bernhard, 103
 Riley, Sidney, 46
 RISC (*Reduced Instruction Set Computing*), 217, 223

- Robinson, Abraham, 160–161, 240
 Robinson, Julia, 262
 Rockefellerova zaklada, 124
 Rusija, carska, 61
 Russell, Bertrand, 115, 116, 120, 131,
 132, 133, 134, 136, 139,
 144, 145, 156, 245, 252
 pismo Fregeu, 57–58, 71–73, 79,
 97
 Poincaréova kritika, 113–114,
 120
 Ryall, John, 45
- Schlick, Moritz, 132, 151
 Schlieffenov plan, 61
 Schuschnigg, Kurt von, 149
 Searle, John R., 231–232, 233–234, 235,
 236
 sekundarni iskaz, 50
 Shannon, Claude, 204
 Siegel, Carl Ludwig, 103
 Sierpiński, Waclaw, 154
 silogizam, 48–54
 simboli:
 i jeziklogike, 134–136
 kodiranje, 139–140
 neodređeni (Boole), 243
 očitanje (Turingov stroj), 176
 razlomci kao $\sim$, 246
 u postupku izračunavanja,
 172–176
 u sustavu PA, 255–260
 simbolička logika, 29–31
 Skolem, Thoralf, 136
 skupovi, teorija skupova, 98, 154,
 155–157
 brojelemenata, 71–72, 83–84
 brojeva, 83–88
 Cantor i $\sim$, 82–88
 dijagonalna metoda, 93–96
 jedinstveni kardinalni broj,
 88–90, *vidi i* hipoteza o
 kontinuumu
 konačni, 91
 neobični, 72–73
 prazni, 47
 prirodni brojevi i $\sim$, 71–72
 transfinitni, 90–91
 Socijaldemokratska stranka,
 Njemačka, 61, 62, 63, 117
 softver, 191, 216, 223, 232
 SophieCharlotte, kraljica Pruske, 27
 Sovjetski Savez, 153, 196
 Srbija, 61
 stajnikup, 184–186
 Staljin, Josif Visarjonovič, 153
 “strojrazlike” (Babbage), 163*fn*
 strojni jezik, 224
 interpretor i kompilator, 143*fn*
 supstitutivnost, 73–74
 Sveučilište u Göttingenu, 59, 103–104,
 193
 svijest, 233–234
 šah, 199, 204, 216, 217, 231–234
- Taussky-Todd, Olga, 148
 teorem čvrste točke, 116–117
 teorija dokaza, *v.* metamatematika
 teorija informacija, 204
Time, 221
The Times, 195
 Toma Akvinski, 77
 topologija, 117, 171
Tractatus Logico-Philosophicus
 (Wittgenstein), 133
 transcendentni brojevi, 86, 247
 tridesetogodišnji rat, 17, 19
 trigonometrijski nizovi, 82, 88, 91, 246

- Turing, Alan, 9, 10, 70, 75, 101, 104,
163–201, 218–219, 227,
228, 230, 237, 269
školo vanje, 165–167, 168–169
analiza postupka
izračunavanja, 172–176
anegdota iz Home Guarda,
198–199
Bombe, 197–198
Colossus, elektronički
kalkulator, 201
dešifriranje Enigme, 196–201
homoseksualnost, 167–168, 199,
220, 224–225
Izveštaj o ACE-u, 215–218, 220,
222–223, 224, 236
na Cambridgeu, 169
na Princetonu, 192–196
obiteljske prilike, 164–167
primjena dijagonalne metode,
182–186
rad na normalnoj distribuciji,
169
rođenje, 165
smrt, 225
stav prema programiranju, 220
Time o ~, 221
TV film o ~, 220, 225
univerzalni stroj, 189–192,
195–196, 209–213
zanimanje za biologiju, 224
Turing, Ethel Sarah Stoney, 164–165
Turing, John, 165, 167
Turing, Julius, 164
turingismus, 200
Turingov stroj, 176, 216, 266–267
nerješivi problemi, 186–188
petorke, 177
primjena dijagonalne metode
na ~, 184
primjeri, 176–182
stajni skup, 184–186
Turingov univerzalni stroj, 189–192,
195, 209–213
i ENIAC, 218–219
iskustvo u Bletchley Parku i ~,
199–200
Tutte, W. T., 267

Ulam, Stanislaw, 194^{fn}
umjetna inteligencija, 159–160, 217,
230–231
umjetni neuroni, teorija, 234
univerzalni kvantifikator, 66
"An Unsolvble Problem of
Elementary Number
Theory" (Church), 191

vakuumska cijev, 200–201, 205, 208
valna teorija svjetlosti, 21
varijacijsko načelo, 126^{fn}
velika ekonomska kriza, 149
Versailleski sporazum, 117, 123
Voltaire, 16^{fn}
von Neumann, John, 14, 120, 121, 122,
125, 138, 150, 169, 213–214,
223^{fn}, 234, 260, 267
biografija, 120^{fn}
i projekt ENIAC, 207
Izveštaj o EDVAC-u, 209–211,
216, 218, 223, 268
prestanak bavljenja logikom,
146–147, 193–194, 207
prvi ozbiljniji program za
EDVAC, 211
stav prema programiranju, 220
Time o ~, 221
vrijeme, 99, 116, 129, 243

Wagner-Jauregg, Julius, 150
Weierstrass, Karl, 81, 87, 94, 104, 105,
108, 117
Weizenbaum, Joseph, 229
Welchman, Gordon, 197 *fn*
Weyl, Hermann, 105, 112, 117, 118,
119, 121, 122, 125, 134,
137, 139, 193, 249
Whitehead, Alfred North, 114, 120,
132, 133, 139, 140, 144,
145, 154, 252
Wilhelm I, car Njemačke, 61
Wilhelm II, car Njemačke, 61, 62
Wilkes, Maurice, 222
Williams, Frederic, 215, 218
Wittgenstein, Ludwig, 63, 133, 244
Womersley, J. R., 215
Woodin, W. Hugh, 264

Zahlbericht (Hilbert), 108
zakon isključenja trećeg, 116, 118, 122
Znanost logike (Hegel), 100

Na logički pogon je savršena kombinacija prijesti ideja biografske izlaganja temeljnih pojmova računarstva i logike s Leibnizovom vizijom *calculus* i Turingovom nastavlja se stvaranjem mehanike simboličke logike i spektakularnim polaskom u svijetla matematike. Sretnim spojem matematičkog genija i logičkog mišljenja, na temelju dostignuća Gödel i Turinga, ovaj je roman namijenju dati teorijsku osnovu univerzalnog računalat.

Međutim uspjeh ovog romana nije izjavamo precizna i izvrsna izjava o djelu Gödelovih teorema i funkciji Turingovih mašina koje uzbuđuju i izazivaju burne povijesti teorije skupova koja je naposljetku dovela do teorema o nepotpunosti i završila modernu matematiku.

Podobno zabavna i informativna angažirana i zanimljiva oživljuje glavne likove u povijesti računarstva i objašnjava ključne pojmove i koncepte s utjelovljeni u elektroničkim računalima.

Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom.

"Nije to samo pisano tome, nego i to je to majstorski uspijeva; knjiga je vrlo informativna, ali i prvi uspjeh u ovom području. U ovom pitanju raspravlja se jasno, točno i pristupačno. Biografske crtece i likove živu u ovom svijetu i smještaju ih u povijest i stvarnost. To je to."

Bulletin of Symbolic Logic

Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom.

Wired

Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom. Knjiga je objavljena u izdanju koje je u obliku krugovima dočeka je s odličnim jezikom i stilom.

isbn: 953-222-138-7



www.superknjizara.hr